# Síkgeometria
# Megoldások

**1) Egy húrnégyszög három szögéről tudjuk, hogy mértékük aránya $7:6:8$.**

**a) Mekkorák a húrnégyszög szögei? (13 pont)**

**Matematika órán, miután minden diák megoldotta a feladatot, három tanuló a következőket állította:**

**Zsófi: A húrnégyszög minden szöge egész szám.**

**Peti: A húrnégyszögnek van derékszöge.**

**Kata: A húrnégyszög egyik szöge $110^\circ$-nál is nagyobb.**

**b) A három tanuló állítása közül melyik igaz a feltételnek megfelelő húrnégyszögre? (3 pont)**

***<u>Megoldás</u>:***

a) A húrnégyszögben a szemközti szögeinek összege 180°. (1 pont)

A megadott arányszámok nem feltétlenül követik a szögek sorrendjét a négyszögben, ezért három esetet különböztetünk meg aszerint, hogy a három arányszám közül melyik két szög van egymással szemben. (3 pont)

A feltételben szereplő három szög legyen $\alpha, \beta, \gamma$, a negyedik $\delta$.

$\alpha + \gamma = 180^\circ$, így a három lehetőség:

| | $\alpha$ | $\beta$ | $\gamma$ | egység | $\delta$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 1.négyszög | $7e$ | $6e$ | $8e$ | $e = 12^\circ$ | |
| | **84°** | **72°** | **96°** | | **108°** |
| 2.négyszög | $6f$ | $7f$ | $8f$ | $f = \frac{90^\circ}{7}$ | |
| | $\frac{540^\circ}{7} = \mathbf{77{,}14^\circ}$ | **90°** | $\frac{720^\circ}{7} = \mathbf{102{,}86^\circ}$ | | **90°** |
| 3.négyszög | $6g$ | $8g$ | $7g$ | $g = \frac{180^\circ}{13}$ | |
| | $\frac{1080^\circ}{13} = \mathbf{83{,}08^\circ}$ | $\frac{1440^\circ}{13} = \mathbf{110{,}77^\circ}$ | $\frac{1260^\circ}{13} = \mathbf{92{,}92^\circ}$ | | $\frac{1900^\circ}{13} = \mathbf{69{,}23^\circ}$ |

Helyesen megadott húrnégyszögenként 3-3 pont (9 pont)

b) Az a) feladat táblázatában látható, hogy **vannak olyan húrnégyszögek, amelyekre rendre igaz a tanórán elhangzott három állítás közül egy-egy**: Zsófi állítása az1., Peti állítása a 2., Kata állítása a 3. négyszögre igaz. (3 pont)

**Összesen: 16 pont**

**2) Az *ABC* derékszögű háromszög *BC* befogójának hossza 18 cm, a *CA* befogójának hossza 6 cm.**

**a) Mekkorák a háromszög hegyesszögei? (3 pont)**

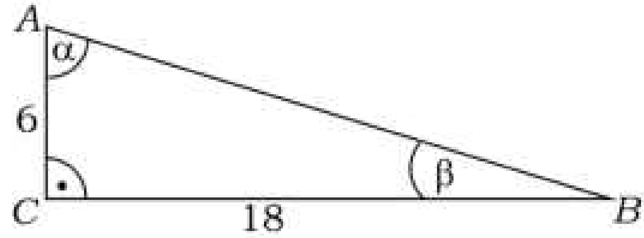
**A *BC* befogó egy *P* belső pontját összekötjük az *A* csúccsal. Tudjuk még, hogy $PB = PA$.**

**b) Milyen hosszú a *PB* szakasz? (6 pont)**

**Állítsunk merőleges egyenest az *ABC* háromszög síkjára *C* pontban! A merőeleges egyenes *D* pontjára teljesül, hogy *CD* 15 cm.**

**c) Mekkora az *ABCD* tetraéder térfogata? (4 pont)**

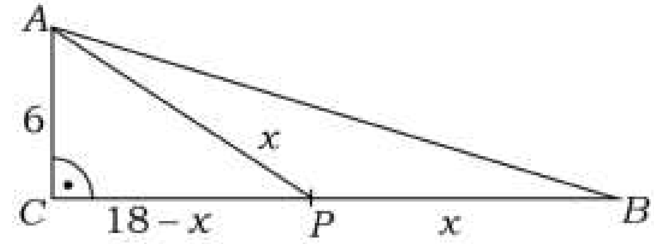
***Megoldás:***




a) A szokásos jelölésekkel: $\mathrm{tg}\beta = \frac{6}{18} = \frac{1}{3}$ (1 pont)

$\beta \approx \mathbf{18,43°}$ (1 pont)

Ekkor $\alpha = 90° - \beta \approx \mathbf{71,57°}$ (1 pont)




b) Jelöljük a derékszögű háromszögben a *PB* szakasz hosszát *x*-szel! (2 pont)

A *PCA* háromszögben $6^2 + (18-x)^2 = x^2$ (2 pont)

$36 + 324 - 36x + x^2 = x^2 \Rightarrow x = 10$

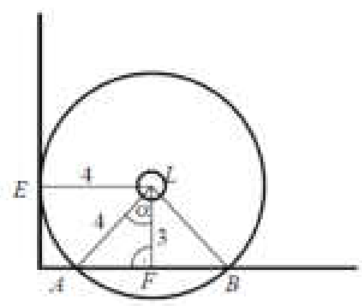
Tehát $\boldsymbol{PB} = \mathbf{10}$ (2 pont)

c) *Lásd: Térgeometria 33. feladat*

**Összesen: 13 pont**

**3) Egy családnak olyan téglalap alakú telke van, melynek két szomszédos oldala 68 m, illetve 30 m hosszú. A telek egyik sarkánál úgy rögzítettek egy kerti locsoló berendezést, hogy a telek rövidebb oldalától 4 m-re, a vele szomszédos oldaltól 3 m-re legyen. A locsoló berendezés körbe forgó locsolófeje azt a részt öntözi, amely a rögzítés helyétől legalább 0,5 m-re, de legfeljebb 4 m-re van. A telek mekkora részét öntözi a locsoló berendezés, és ez hány százaléka a telek területének? (11 pont)**

***Megoldás:***




A telek öntözött területének nagyságát megkapjuk, ha az *L* középpontú körgyűrű területéből kivonjuk az *AB* húr által lemetszett körszelet területét (1 pont)

A körgyűrű területe: $\left(4^2 - 0,5^2\right)\pi \approx 49,5\ \mathrm{m}^2$ (1 pont)

Az *AFL* derékszögű háromszögből: $\cos\alpha = \frac{3}{4}$, amiből

$\alpha \approx 41,4°$ (2 pont)

A $2\alpha$ középponti szögű *ALB* körcikk területe: $\frac{82,8 \cdot 4^2 \cdot \pi}{360} \approx 11,6\ \mathrm{m}^2$ (2 pont)

Az *ALB* egyenlőszárú háromszög területe: $\frac{4^2 \cdot \sin 82,8°}{2} \approx 7,9\ \mathrm{m}^2$ (2 pont)

A körszelet területe tehát kb. 3,7 m² és így a telek öntözött területe kb. $49,5 - 3,7 = \mathbf{45,8\ m^2}$ (1 pont)

**Ez a telek területének kb. 2,2%-a.** (2 pont)

**Összesen: 11 pont**

**4) Az *ABC* háromszög körülírt körének sugara 26 cm, $BAC\sphericalangle = 60°$**

**a) Számítsa ki a *BC* oldal hosszát! (4 pont)**

**b) Hány fokos a háromszög másik két szöge, ha az *AC* oldal *b* cm, az *AB* oldal 3*b* cm hosszúságú? (12 pont)**

**A keresett értékeket egy tizedesjegyre kerekítve adja meg!**

***Megoldás:***

a) $BC = 2\cdot 26\cdot \sin 60°$ (3 pont)
$BC \approx \mathbf{45{,}0\ cm}$. (1 pont)

b) Koszinusztételt felírva a $BC$ oldalra: $(52\sin 60°)^2 = b^2 + 9b^2 - 6b^2\cos 60°$

(2 pont)

Ebből $b^2 = 289{,}7$. (2 pont)

Mivel $b > 0$, ezért $b = 17$ (és így $3b = 51$). (1 pont)

Erre felírva a szinusztételt $\frac{\sin\beta}{\sin 60°} = \frac{AC}{BC} = \frac{17}{45}$, amiből (2 pont)

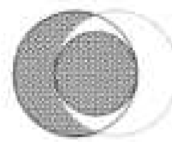
$\sin\beta \approx 0{,}3273$, így $\boldsymbol{\beta \approx 19{,}1°}$, (2 pont)

mert az $AC$ oldallal szemköztes $\beta$ csak hegyesszög lehet. (2 pont)

A háromszög harmadik szöge pedig **kb. 100,9°** . (1 pont)

**Összesen: 16 pont**

**5) Klári teasüteményt készít. A meggyúrt tésztát olyan „téglatest” alakúra nyújtotta ki, amelynek a felülről látható lapja 30 cm x 60 cm méretű téglalap.**
**Majd egy henger alakú szaggatóval (határoló körének sugara 3 cm) „körlapokat” vágott ki a tésztából.**
**Ezután a körlapocskákból először „holdacskákat” vágott le úgy, hogy a szaggató határoló körének középpontja a már kivágott körlap középpontjától 2 cm távolságra helyezte el, és így vágott bele a körlapba. (Minden bevágásnál csakis egy körlapot vágott ketté.)**
**Miután minden körlapból levágott egy „holdacskát”, a körlapokból visszamaradt részek mindegyikéből –egy másik szaggatóval- kivágott egy-egy lehető legnagyobb körlap alakú süteményt.**



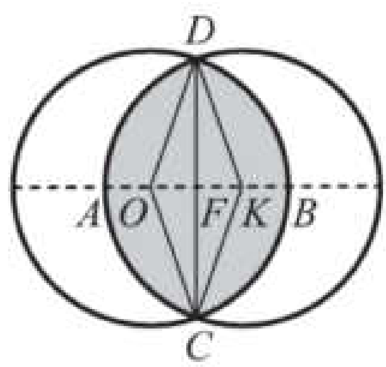
**a) Hány cm² területű egy „holdacska” felülről látható felülete? (Az eredményt egy tizedesjegyre kerekítve adja meg!) (11 pont)**

**Klári a „holdacskák” és a kis körlapok elkészítése után visszamaradt tésztát ismét összegyúrta, majd ugyanolyan vastagságúra nyújtotta ki, mint az első esetben, de most négyzet alakú lett a kinyújtott tészta.**

**b) Hány cm hosszú ennek a négyzetnek az oldala, ha Klári a $30\ \text{cm} \times 60\ \text{cm}$-es téglalapból eredetileg 50 darab 3 cm sugarú körlapot szaggatott ki? (Az eredmény egészre kerekítve adja meg!) (5 pont)**

***Megoldás:***

a) Használjuk az ábra jelöléseit!
A 3 cm sugarú $k$ körlapba bevágni ugyanazzal a kör alakú formával azt jelenti, hogy az $O$ középpontú 3 cm sugarú kört eltoljuk 2 cm-rel az $\overrightarrow{OK}$ vektorral. A $k$ körlapból kivágunk egy $T$ tartományt. (rajzon szürkével szerepel) $T$-nek szimmetriatengelye a $DC$ és az $OK$ egyenes. A $T$-t határoló két körív sugara egyaránt 3 cm, középpontjuk $O$ és $K$ pont. A $T$ tartomány két egybevágó körszeletből áll (2 pont)




Egy ilyen körszelet (pl. a $DCB$) területét számoljuk ki:

$t_{\text{körszelet}} = t_{\text{körcikk}} - t_{\text{háromszög}}$ (1 pont)

Az $OBCD$ körcikk középponti szöge és az $ODC$ háromszög szárszöge is a $DOC$ szög. Legyen $DOC\sphericalangle = 2\alpha$

Az $\alpha$ nagyságát a $FOC$ derékszögű háromszögből számoljuk ki. $OC = 3, OF = 1$, innen $\cos\alpha = \frac{1}{3}$ (1 pont)

$\alpha = 1{,}23 \quad (\alpha = 70{,}543°)$ (1 pont)

$\text{ív}_{DBC} = r \cdot 2\alpha(rad) = 7{,}39$ (1 pont)

ahonnan $t_{\text{körcikk}} = \frac{\text{ív} \cdot r}{2} = 11{,}07\ \text{cm}^2$ (1 pont)

$t_{\text{háromszög}} = \frac{r^2 \cdot \sin(2\alpha)}{2} = 2{,}83\ \text{cm}^2$ (1 pont)

$t_{\text{körszelet}} = 8{,}25\ \text{cm}^2$ (1 pont)

$t_{\text{holdacska}} = t_{\text{kör}} - 2 \cdot t_{\text{körszelet}} = 11{,}78\ \text{cm}^2$ (1 pont)

**Egy holdacska felülről látható felületének területe 11,8 cm²** (1 pont)

b) Minden körlapból lett egy holdacska és egy 2 cm sugarú körlap formájú sütemény$(AB = 4\ \text{cm})$ (1 pont)

Klári az eredeti $30 \times 60$-as téglalapból kivágott 50 darab holdacskát és 50 db 2 cm sugarú kört. A kivágott sugarak alapterülete: $50 \cdot 11{,}78 + 50 \cdot 2^2\pi = 1217\,\text{cm}^2$ (1 pont)

A maradék alapterület ekkor: $30 \cdot 60 - 1217 = 583\ \text{cm}^2$ (1 pont)

Ebből négyzet alapú formát kellett készíteni azonos vastagsággal. A négyzet alakúra kinyújtott tészta alapterülete a maradék alapterület, vagyis 583 cm² (1 pont)

Ennek a négyzetnek az oldala $\sqrt{583}$, azaz kerekítve **24 cm** (1 pont)

**Összesen: 16 pont**

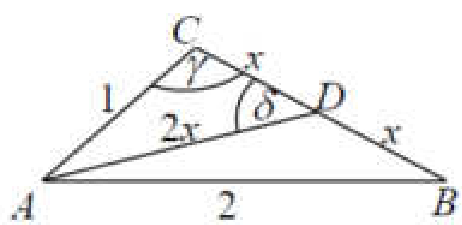
**6) Az $ABC$ háromszögben $AB = 2$, $AC = 1$, a $BC$ oldal hossza pedig megegyezik az $A$ csúcsból induló súlyvonal hosszával.**

**a) Mekkora a $BC$ oldal hossza? A hossz pontos értékét adja meg! (9 pont)**

**b) Mekkora a háromszög területe? A terület pontos értékét adja meg! (5 pont)**

***Megoldás:***

a) A feladat helyes értelmezése (1 pont)




Az ábra jelöléseit használva az $ADC$ háromszög $AD$ oldalára felírva a koszinusztételt: (1 pont)

$4x^2 = x^2 + 1 - 2x\cos\gamma$, ahol $0 < x,\ 0 < \gamma < \pi$ (1 pont)

Az $ABC$ háromszög $AB$ oldalára is felírjuk a koszinusztételt: (1 pont)

$4 = 4x^2 + 1 - 4x\cos\gamma$. (1 pont)

Az első egyenletet beszorozva 2-vel, majd kivonva belőle a második egyenletet a következőt kapjuk:

$8x^2 - 4 = 1 - 2x^2$ (2 pont)

Az egyenlet pozitív gyöke $x = \frac{1}{\sqrt{2}}$ (1 pont)

Így a keresett oldal hossza: $BC = 2x = \frac{2}{\sqrt{2}} = \boldsymbol{\sqrt{2}}$ (1 pont)

b) $T=\dfrac{AC\cdot BC\sin\lambda}{2}=\dfrac{\sqrt{2}\sin\gamma}{2}=\dfrac{\sin\gamma}{\sqrt{2}}$ (1 pont)

a $4x^2=x^2+1-2x\cos\gamma$ egyenletből $\cos\gamma=\dfrac{1-3x^2}{2x}=-\dfrac{1}{2\sqrt{2}}=-\dfrac{\sqrt{2}}{4}$ (2 pont)

Így $\sin\gamma=\sqrt{1-\cos^2\gamma}=\sqrt{1-\dfrac{1}{8}}=\sqrt{\dfrac{7}{8}}$ (1 pont)

Behelyettesítve: $T=\dfrac{\sin\gamma}{\sqrt{2}}=\dfrac{\sqrt{\mathbf{7}}}{\mathbf{4}}$ (1 pont)

**Összesen: 14 pont**

**7) István örömmel mesélte Péter barátjának, hogy egy négyszög alakú telket vett, amire majd házat akar építeni. Elmondása szerint a négyszög egyik szöge derékszög, és az ezt közrefogó mindkét oldal 20,0 m hosszú. A telek másik két oldala is egymással egyenlő hosszú, ezek 120°-os szöget zárnak be.**

**a) Hány méter hosszú drót szükséges az üres telek körbekerítéséhez? (4 pont)**

**„Mekkora házat szeretnél rá építeni?” - kérdezte Péter.**

**„Négyzet alapú sarokházat, és körülbelül 100m² alapterületűt. Úgy gondoltuk a párommal, hogy a házat a derékszögű sarokba építjük.” - válaszolt István.**

**„Ha jól képzelem el a telek alakját, akkor az nagyon furcsa alakú lehet. Oda még egy kis faház sem fér el.” - szólt nevetve Péter.**

**b) Rajzolja le, milyen alakú az István által megvett telek, és milyennek képzelte el Péter! (2 pont)**

**c) Legfeljebb mekkora alapterületű, négyzet alapú sarokház férne el a telek derékszögű sarkába az egyik és mekkora a másik esetben? (Válaszát m²-re kerekítve adja meg! (7 pont)**

***Megoldás:***

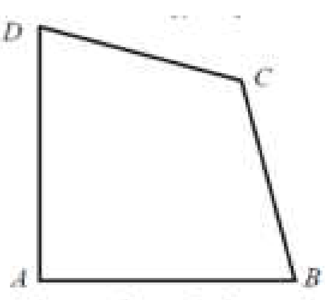
a) $BD=20\sqrt{2}$ (1 pont)

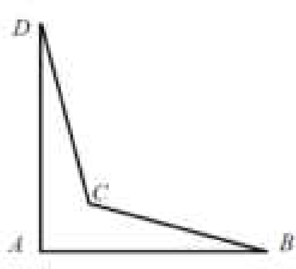
A $BDC$ egyenlő szárú háromszögben $BDC\sphericalangle=30°$. A háromszög $C$ csúcsából húzott magasság felezi a $DB$ alapot. (Jelölje $F$ a $DB$ oldalfelező pontját.) A $DFC$ derékszögű háromszögben $\cos 30°=\dfrac{DF}{DC}$ (1 pont)

Így $\dfrac{\sqrt{3}}{2}=\dfrac{10\sqrt{2}}{b}$, azaz $b=\dfrac{20\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$ (1 pont)

Tehát a kerítés hossza: $40+\dfrac{40\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\approx \mathbf{72,7}\,(\mathbf{m})$ (1 pont)

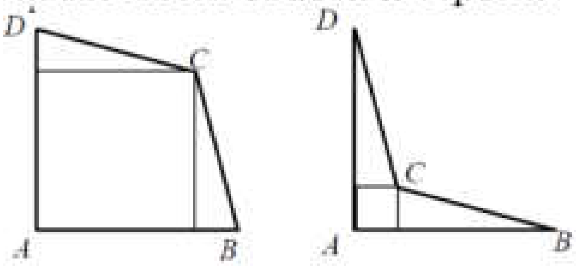
b) István ilyen négyszög alakú telket látott: (1 pont)




**Péter konkáv négyszögre gondolt** (1 pont)

c) A négyzet alapú ház alapterülete akkor a lehető legnagyobb, ha a négyzet $A$-val szembeni csúcsa a $C$ pont.




Az $ABCD$ négyszögbe berajzolva a négyzetet, az a négyszögben két egybevágó derékszögű háromszöget hoz létre. (2 pont)

Jelölje $T$ a $C$ csúcsból húzott, $AD$ oldalnak a metszéspontját. Ekkor a $TC$ a keresett négyzet oldala. István konvex négyszögében $TCD\sphericalangle = 15°$ (1 pont)

A $TCD$ derékszögű háromszögben: $\cos 15° = \frac{CT}{b}$ (1 pont)

Mivel $b = \frac{20\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$ , így $CT = \frac{20\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \cdot \cos 15° \approx 15{,}77\ (\mathrm{m})$.

**Ekkor a ház alapterülete: kb. 249 $\mathbf{m^2}$ lenne.** (1 pont)

Péter konkáv négyszöge esetében $TCD\sphericalangle = 75°$. Mivel ekkor $\cos 75° = \frac{CT}{b}$,

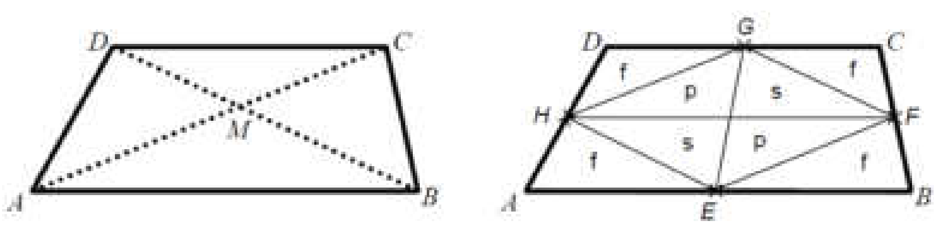
(1 pont)

így $CT = \frac{20\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \cdot \cos 75° \approx 4{,}23\ (\mathrm{m})$. **Ekkor a ház alapterülete: kb. 18 $\mathbf{m^2}$ lenne** (1 pont)

**Összesen: 13 pont**

**8) Egy 90 $\mathbf{m^2}$ területű trapéz alakú virágágyás párhuzamos oldalainak aránya $AB : DC = 3 : 2$. Az ágyást tavasszal és ősszel is évszaknak megfelelő virágokkal ültetik be. Mindkét alkalommal mindegyik fajta virágból átlagosan 50 virágtövet ültetnek négyzetméterenként.**
**Tavasszal az átlókkal kijelölt négy háromszögre bontották a virágágyást. Az *ABM* háromszögbe sárga virágokat, a *DMC* háromszögbe fehéret, a maradék két részbe piros virágokat ültettek.**

**a) A tavaszi párosításkor hány darab fehér, hány piros és hány sárga virágot ültettek? (9 pont)**




**Ősszel a másik ábra szerint tervezték meg a virágok elhelyezését. (Az *E,F,G,* és *H* pontok a trapéz oldalainak felezőpontjai.) Ekkor is fehér $(f)$, piros $(p)$ és sárga $(s)$ virágokat ültettek a tervrajz alapján.**

**b) Az őszi parkosításkor hány darab fehér, hány piros és hány sárga virágot ültettek? (7 pont)**

**Válaszait az alábbi táblázatban tüntesse fel!**

| | fehér | piros | sárga |
|---|---|---|---|
| tavasszal | | | |
| ősszel | | | |

***Megoldás:***

a) A telje beültetéshez $50 \cdot 90 = 4500$ db virágra van szükség. A különböző színű virágok darabszám a megfelelő területek arányából számolható. Kiszámoljuk a megfelelő területeket. Jelölje az *MCD* háromszög területét *t*, az *MBA* háromszög területét *T*, az *MBC* háromszögét $t_1$ és az *MAD* háromszögét $t_2$.

(1 pont)

Az *MBA* és az *MCD* háromszögek hasonlóak, hiszen szögeik páronként egyenlők. A hasonlóság aránya alapján: $\frac{3}{2} = \frac{AM}{MC} = \frac{BM}{MD}$ (1 pont)

Az *MBA* háromszög területe $T = \left(\frac{3}{2}\right)^2 t$ (1 pont)

Az *ADC* háromszög területét a *DM* szakasz $MA : MC = 3 : 2$ arányban osztja, ezért $t_1 = \frac{3}{2} t$ (1 pont)

Ugyanígy $t_2 = \frac{3}{2} t$ (1 pont)

A trapéz területe: $90 = t + 2t_1 + T = t + 3t + 2,25t = 6,25t$ (1 pont)

$t = 14,4\left(m^2\right)$ (1 pont)

**A fehér virágok száma $14,4 \cdot 50 = 720$** (1 pont)

**a pirosaké $3 \cdot 720 = 2160$ a sárgáké pedig 1620** (1 pont)

b) Az *EFGH* négyszög paralelogramma, mert két szemközti oldala pl. *EF* és *HG* párhuzamosak az *AC* átlóval, és egyenlők az *AC* felével (1 pont)

Az *EFGH* paralelogramma területe fele az *ABCD* trapéz területének, $T_{EFGH} = 45\,m^2$ (2 pont)

$T_{ABCD} = \frac{AB + DC}{2} \cdot m = HF \cdot m = 2\left(HF \cdot \frac{m}{2}\right)$ (1 pont)

Egy paralelogrammát két átlója négy egyenlő területű háromszögre bontja, ezért (1 pont)

a piros és sárga virágokból egyaránt $\frac{2250}{2} = 1125$ tövet ültettek (1 pont)

A fehér virágokkal beültetett terület a trapéz területének a fele, tehát fehér virágból $45 \cdot 50 = 2250$ tövet ültettek (1 pont)

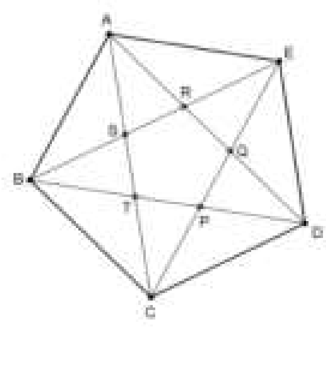
| | fehér | piros | sárga |
|---|---|---|---|
| tavasszal | **720** | **2160** | **1620** |
| ősszel | **2250** | **1125** | **1125** |

**Összesen: 16 pont**

**9) Megrajzoltuk az *ABCDE* szabályos sokszöget, és berajzoltuk minden átlóját. Az átlók metszéspontjait az ábra szerint betűztük meg: *P, Q, R, S, T*.**

**a) Hány olyan háromszög látható az ábrán, amelyek mindhárom csúcsa a megjelölt 10 pont közül való, és mindhárom oldalegyenese az *ABCDE* ötszög oldalegyenesei és átlóegyenesei közül kerül ki?** **(8 pont)**

**b) Tudjuk, hogy az *ABCQ* négyszög területe $120\ cm^2$. Mekkora az *ABCDE* ötszög területe? Válaszát egész értékekre kerekítve adja meg!** **(4 pont)**



c) **Tekintsük azt a tíz csúcsú gráfot, amelyet a megadott ábra szemléltet. Erről a gráfról fogalmaztunk meg két állítást. Állapítsa meg mindkét állításról, hogy igaz vagy hamis! Adjon rövid magyarázatot a válaszra!**
**1.állítás: Ennek a gráfnak 20 éle van.**
**2.állítás: Ebben a gráfban van olyan részgráf, amely nyolc élű kör.**
**(4 pont)**

***Megoldás:***

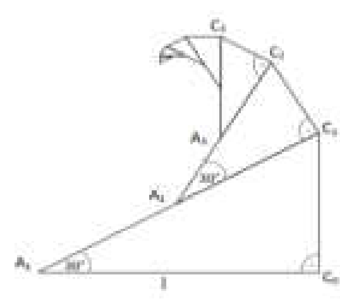
a) A számba veendő háromszögek szögei: 36°, 36° és 108°, vagy 72°, 72° és 36°. (1 pont)
Ezért kétféle lényegesen különböző háromszög van az ábrán. (1 pont)
Az olyan háromszögekből, amelynek szögei 36°, 36°és 108°, két méret van: a leghosszabb oldal vagy az *ABCDE* ötszög oldala vagy oldala. (1 pont)
Az ilyen háromszögek száma $10+5=15$ (1 pont)
Az olyan háromszögekből, amelynek a szögei 36°, 36°és 108°, három méret van: a legrövidebb oldal az *ABCDE* vagy a *PQRST* ötszög egy-egy oldala, illetve a csillagötszög egy-egy oldala (2 pont)
Az ilyen háromszögek száma $5+5+10=20$ (1 pont)
Összesen **35** háromszög van az ábrán (1 pont)

b) Az *ABCQ* négyszög rombusz, mert szemközti szögei egyenlők: 72°és 108°. Ha az ötszög (a rombusz) oldalát *a*-val jelöljük:
$a^2 \cdot \sin 108° = 120 \quad (a \approx 11,232\ cm)$ (1 pont)
A szabályos ötszög területét 5 egybevágó középponti háromszög *(ABO)* területéből számíthatjuk: $T_{ABCDE} = 5 \cdot \frac{a \cdot m}{2} = \frac{5}{4} a^2 \cdot \mathrm{tg} 54°$, ahol $m = \frac{a}{c} \cdot \mathrm{tg} 54°$
(1 pont)
$T_{ABCDE} = \frac{5}{4} \cdot \frac{120}{\sin 108°} \cdot \mathrm{tg} 54°$ (1 pont)
$\boldsymbol{T_{ABCDE} \approx 217\ \mathrm{cm}^2}$ (1 pont)

c) *Lásd: Gráfok 15. feladat*

**Összesen: 16 pont**

**10) Az $A_1C_0C_1$ derékszögű háromszögben az $A_1$ csúcsnál 30°-os szög van, az $A_1C_0$ befogó hossza 1, az $A_1C_1$ átfogó felezőpontja $A_2$.**
**Az $A_2C_1$ szakasz „fölé” az $A_1C_0C_1$ háromszöghöz hasonló $A_2C_1C_2$ derékszögű háromszöget rajzoljunk az ábra szerint. Az $A_2C_2$ átfogó felezőpontja $A_3$.**



**Az $A_3C_2$ szakasz „fölé” az $A_2C_1C_2$ háromszöghöz hasonló $A_3C_2C_3$ derékszögű háromszöget rajzolunk.**
**Ez az eljárás tovább folytatható.**

a) **Számítsa ki az így nyerhető végtelen sok derékszögű háromszög területének összegét (az összeg első tagja az $A_1C_0C_1$ háromszög területe.)! (7 pont)**

b) **Igazolja, hogy a $C_0C_1C_2 \ldots C_n$ töröttvonal hossza minden pozitív *n*-re kisebb, mint 1,4. (9 pont)**

**Megoldás:**

a) Az $A_1C_0C_1$ háromszög területe $t_1=\frac{\sqrt{3}}{6}$ (1 pont)

Az $A_nC_{n-1}C_n$ háromszöget $\frac{1}{\sqrt{3}}$ arányú hasonlósággal lehet átvinni $A_{n+1}C_nC_{n+1}$ háromszögbe $(n\in\mathbb{N}^+)$ (1 pont)

A hasonló síkidomok területének arányára vonatkozó tétel alapján (1 pont)

az $A_nC_{n-1}C_n$ háromszög területe: $t_n=\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2 t_{n-1}=\frac{1}{3}t_{n-1}$ (ha $n>1$) (1 pont)

A területek összegéből képzett $(t_1+t_2+\ldots+t_n+\ldots)$ mértani sor (1 pont)

amelynek hányadosa $\frac{1}{3}$ (1 pont)

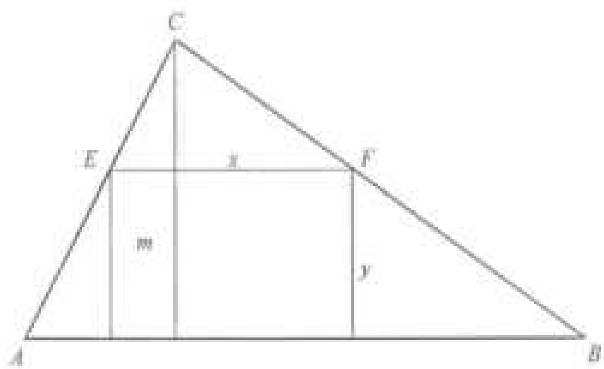
A végtelen sok háromszög területének összege: $T=\frac{\frac{\sqrt{3}}{6}}{1-\frac{1}{3}}=\frac{\sqrt{3}}{4}\approx \mathbf{0,433}$ (1 pont)

b) *Lásd: Bizonyítások 12. feladat*

**Összesen: 16 pont**

**11) Az $ABC$ háromszög oldalai $AB=42$, $BC=40$, $CA=26$. Írjunk téglalapot a háromszögbe úgy, hogy a téglalap egyik oldala illeszkedjen a háromszög $AB$ oldalára, másik két csúcsa pedig a háromszög $CA$, illetve $BC$ oldalára essen. Tekintsük az így beírható téglalapok közül a legnagyobb területűt! Mekkorák ennek a téglalapnak az oldalai? (16 pont)**

**Megoldás:**




Az $AB$ oldalhoz tartozó magasság kiszámításához írjuk fel a háromszög területét kétféleképpen!

$T=\sqrt{54\cdot 12\cdot 14\cdot 28}=504$ (2 pont)

$T=\frac{42\cdot m}{2}$ (1 pont)

A kétféle felírás egyenlőségéből $m=24$ (1 pont)

Legyen a téglalap $AB$-re illeszkedő oldala $x$, a másik oldala $y$.

Az $ABC$ háromszög hasonló az $EFC$ háromszöghöz, mert párhuzamos helyzetűek (2 pont)

A hasonlóság miatt $\frac{x}{24-y}=\frac{42}{24}$ (2 pont)

Ahonnan $y=\frac{168-4x}{7}$ (1 pont)

A téglalap területe $x$ függvényében, $x\in\,]0;42[$: $t(x)=xy=\frac{168x-4x^2}{7}$ (2 pont)

Elegendő a $\frac{7}{4}\cdot t(x)=42x-x^2$ függvény szélsőérték helyét keresni (1 pont)

Teljes négyzetté alakítva a függvényt: $x\mapsto -(x-21)^2+441$ (1 pont)

A függvényérték maximális, ha a négyzetes tag nulla, azaz $\boldsymbol{x = 21}$ (1 pont)

$21 \in ]0;42[$, tehát itt van a minimum (1 pont)

A téglalap másik oldala $\boldsymbol{y = 12}$ (1 pont)

**Összesen: 16 pont**

**12)**

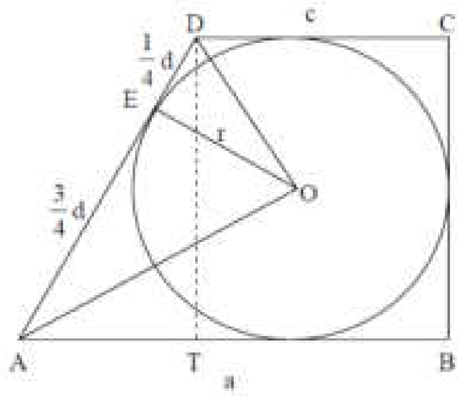
**a) A *KLMN* derékszögű trapéz alapjai $KL = 2\sqrt{12}$ és $MN = 3\sqrt{75}$ egység hosszúak, a derékszögű szár hossza $10\sqrt{2}$ egység. A trapézt megforgatjuk az alapokra merőleges *LM* szár egyenese körül. Számítsa ki a keletkezett forgástest térfogatát! ($\pi$ két tizedesjegyre kerekített értékével számoljon, és az eredményt is így adja meg!)** **(4 pont)**

**b) Az *ABCD* derékszögű érintőtrapéz *AB* és *CD* alapjai $(AB > CD)$ hosszának összege 20. A beírt körnek az alapokra nem merőleges *AD* szárral vett érintési pontja negyedeli az *AD* szárat. Számítsa ki a trapéz oldalainak hosszát!** **(12 pont)**

***Megoldás:***

a) *Lásd: Térgeometria 34. feladat*

b) Legyen $AB = a, BC = b, CD = c, DA = d$. A beírt kör sugara *r*, középpontja *O*, az *AD* oldallal vett érintési pontja *E*. A *D*-ből induló magasság talppontja az *AB* oldalon *T*.




A feltételek alapján $a + c = b + d = 20$ és $b = 2r$ (2 pont)

Mivel a trapéz szárain fekvő szögek összege 180°, és *O* a belső szögfelezők metszéspontja, ezért az *AOD* háromszög derékszögű *O* pontban (2 pont)

Ennek a derékszögű háromszögnek az átfogóhoz tartozó magassága éppen az *OE* sugár, ezért a magasságtétel és a feltétel alapján: $r^2 = \dfrac{3d^2}{16}$, ahonnan $r = \dfrac{d\sqrt{3}}{4}$ (2 pont)

Így viszont $b = 2r = \dfrac{d\sqrt{3}}{2}$, amiből adódik, hogy a *TDA* háromszög egy szabályos háromszög fele. Ebből következik, hogy $a = c + \dfrac{d}{2}$ (2 pont)

$d + \dfrac{d\sqrt{3}}{2} = 20$, ahonnan (1 pont)

$d = \dfrac{40}{2+\sqrt{3}} = 40\left(2-\sqrt{3}\right) \approx \mathbf{10,72}$

$b = \dfrac{d\sqrt{3}}{2} = 20\left(2\sqrt{3}-3\right) \approx \mathbf{9,28}$ (1 pont)

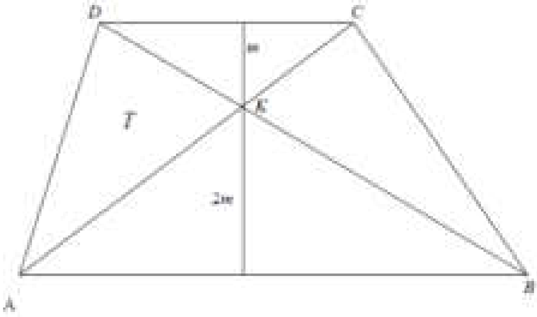
$a + c = 2c + \dfrac{d}{2} = 20$, ebből $c = 10\left(\sqrt{3}-1\right) \approx \mathbf{7,32}$ (1 pont)

$a = 20 - c = 10\left(3-\sqrt{3}\right) \approx \mathbf{12,68}$ (1 pont)

**Összesen: 16 pont**

**13)** **Az *ABCD* trapéz párhuzamos oldalai *AB* és *CD* és $AB > CD$. A trapéz átlóinak metszéspontja *K*. Az *ABK* háromszög *AB* oldalához tartozó magassága kétszerese a *CDK* háromszög *CD* oldalához tartozó magasságának. Jelölje *T* az *ADK* háromszög területét!**
**Hányszorosa az *ABCD* trapéz területe *T*-nek? (16 pont)**

***Megoldás:***

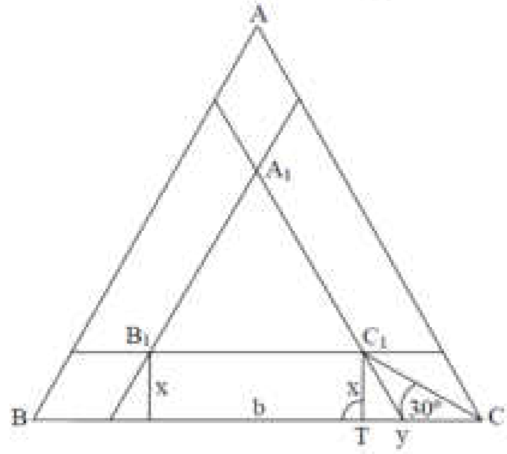



Jelöljük a *CDK* háromszög *CD* oldalához tartozó magasságát *m*-mel.
Ekkor az *ABK* háromszög *AB* oldalához tartozó magassága $2m$.
$T_{ABD} = T_{ABC}$, mert a két háromszög közös *AB* oldalához tartozó magasságuk egyenlő hosszú. (1 pont)
Az *ABC* és az *ABD* háromszöglapoknak közös része az *ABK* háromszöglap. (1 pont)
így $T_{ADK} = T_{BKC}$, azaz mindkettő *T* területű. (1 pont)
A *CDK* háromszög hasonló az *ABK* háromszöghöz (1 pont)
és a hasonlóság aránya $\frac{m}{2m} = \frac{1}{2}$ (1 pont)
Mivel a hasonló síkidomok területének aránya a hasonlóság arányának négyzetével egyezik meg, ezért $t_{CDK} : t_{ABK} = 1:4$ (2 pont)
A *CDK* háromszög területét *t*-vel jelölve: $t_{ACD} = t + T$ (1 pont)
és $t_{ABC} = 4t + T$ (1 pont)
Mivel az *ABC* és az *ACD* háromszög *AB* illetve *CD* oldalához tartozó magassága megegyezik, és $AB = 2 \cdot CD$, ezért $t_{ABC} = 2 \cdot t_{ACD}$ (2 pont)
Így $4t + T = 2(t + T)$ (1 pont)
Ebből $t = \frac{T}{2}$ adódik (1 pont)
Ezért $t_{ACD} = t + T = \frac{3}{2}T$ és $t_{ABC} = 3T$ (2 pont)
Mivel $t_{ABCD} = t_{ABC} + t_{ACD}$, ezért az *ABCD* trapéz területe **4,5-szerese** *T*-nek (1 pont)
**Összesen: 16 pont**

**14)** **Kartonpapírból kivágunk egy 1,5 dm magasságú *ABC* szabályos háromszöglapot. A háromszöglapon párhuzamost húzunk a háromszög mindegyik oldalával, mindegyikből ugyanakkora 0,5 deciméternél kisebb *x* távolságra. Ezek az egyenesek az $A_1B_1C_1$ szabályos háromszög oldalegyenesei.**
**a) Írja fel az $A_1B_1C_1$ háromszög területét *x* függvényében! (6 pont)**
**b) Szeretnénk egy $A_1B_1C_1$ alapú *x* magasságú, felül nyitott egyenes hasáb alakú íróasztali tolltartót létrehozni a lapból, ezért levágjuk a fölösleget, majd az $A_1B_1C_1$ háromszög élei mentén felhajtottuk a hasáb oldallapjait. Mekkora *x* estén lesz a keletkezett hasáb térfogata maximális? (10 pont)**

***Megoldás:***

a) Az $ABC$ szabályos háromszög oldalhossza $a = \sqrt{3}$. Az $ABC$ súlypontja 0,5 dm távolságra van a háromszög oldalegyeneseitől, s mivel $x < 0,5$, így ez a súlypont az $A_1B_1C_1$ háromszög az $ABC$ háromszög belsejében van. (2 pont)




Az $A_1;B_1;C_1$ pontok rendre az $ABC$ háromszög $A$-ból, $B$-ből, $C$-ből induló belső szögfelezőjének egy-egy pontja. Jelöljük $b$-vel az $A_1B_1C_1$ háromszög oldalának hosszát.

Az ábra szerinti $CC_1T$ derékszögű háromszögben legyen $x = C_1T$ és $y = TC$

Ekkor $\text{ctg}30° = \frac{y}{x}$, így $y = x\sqrt{3}$ (2 pont)

A tengelyes szimmetria figyelembevételével: $b = \sqrt{3} - 2x\sqrt{3}$ (1 pont)

$T_{A_1B_1C_1} = \frac{b^2 \cdot \sqrt{3}}{4} = \frac{\mathbf{3\sqrt{3}(1-2x)^2}}{\mathbf{4}}$ **dm²** (1 pont)

b) *Lásd: Térgeometria 14. feladat*

**Összesen: 16 pont**

**15) A Csendes-óceán egyik kis szigetétől keletre, a szigettől 16 km távolságban elsüllyedt egy föld körüli úton járó vitorlás. A legénység egy mentőcsónakban segítségre vár, a náluk lévő jeladó készülék hatósugara mindössze 6 km. Amikor a vitorlás elsüllyedt, akkor a szigettől délre, a szigettől 24 km távolságra volt egy tengerjáró hajó. Ez a hajó állandóan északkeleti irányba halad, a hajótöröttek pedig a vitorlás elsüllyedésének helyéről folyamatosan küldik a vészjeleket.**

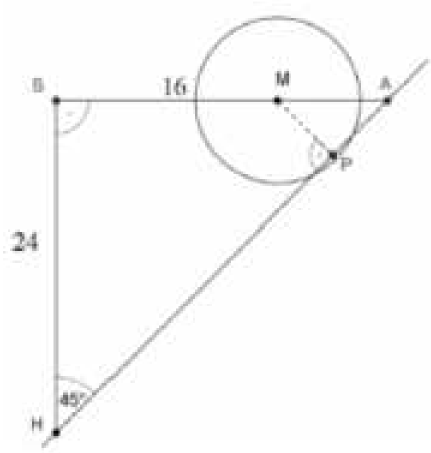
**a) Igazolja, hogy a tengerjáró legénysége észlelheti a segélykérő jelzést!** **(7 pont)**

**Egy 1,5 km magasságban haladó repülőgép éppen a sziget felett van, amikor a repülőgép fedélzeti műszerei észlelik a tengerjáró hajót, amely a vitorlás elsüllyedése óta 20 km-t tett meg.**

**b) Mekkora depresszió szög (lehajlási szög) alatt észlelik a műszerek a tengerjárót? Válaszát fokban, egészre kerekítve adja meg! Számításai során a Föld görbületétől tekintsen el!** **(7 pont)**

***Megoldás:***

a) A feladat feltételeit feltüntető jó ábra.




A sziget az $S$, a mentőcsónakot az $M$, a tengerjáró hajót a $H$ pont jelöli. A hajó útjának és az $SM$ egyenesnek a metszéspontját jelölje $A$. (2 pont)

A $HSA$ háromszög derékszögű, egyenlő szárú, ezért $AS = 24$ km (1 pont)

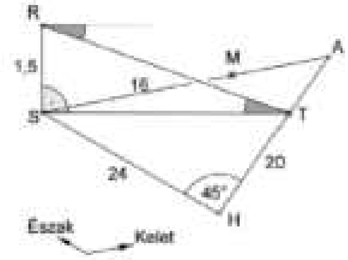
$MA = 8$ km (1 pont)

Valamint az $APM$ háromszög derékszögű és van 45°-os szöge (1 pont)

Ezért $MP = 4\sqrt{2}\,(\approx 5,7)$ (1 pont)

**Mivel $MP < 6$ km, ezért a hajó legénysége észlelheti a jelzéseket.** (1 pont)

b) A feladat feltételeit feltüntető jó ábra




A repülőgép ($R$), a sziget ($S$) és a tengerjáró hajó ($T$) egy $S$-nél derékszögű háromszög három csúcsában helyezkedik el. (1 pont)

Az $ST$ távolságot koszinusztétellel számolhatjuk ki

$ST^2 = 24^2 + 20^2 - 2 \cdot 24 \cdot 20 \cdot \cos 45°$ (2 pont)

$ST \approx 17{,}2\ \text{km}$ (1 pont)

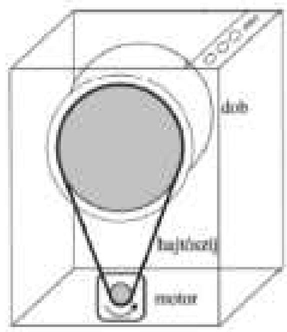
A depresszió szög nagysága megegyezik a $TRS$ derékszögű háromszög $RTS$ szögének nagyságával (váltószögek). (1 pont)

$\text{tg} RTS\sphericalangle = \dfrac{RS}{TS} \approx \dfrac{1{,}5}{17{,}2}$ (1 pont)

**A depresszió szög kb 5° nagyságú** (1 pont)

**Összesen: 14 pont**

**16) Az ábrán egy mosógép vázlatos rajza látható. A kisebb, 1 cm sugarú kerék a motor tengelyéhez kapcsolódik, és egy hajtószíj segítségével forgatja meg a mosógép dobjához rögzített, 20 cm sugarú kereket, amitől a dob és benne a ruhák forognak mosás közben. A két kerék tengelye párhuzamos, a tengelyek távolsága 46 cm. (A hajtószíj a tengelyekre merőleges síkban van.) Milyen hosszú a feszes hajtószíj? (13 pont)**




***Megoldás:***

Jó ábra felrajzolása (2 pont)

A keresett hajtószíjhossza az egymással egyenlő hosszú $E_1E_2$ és $E_3E_4$ érintőszakaszokból, valamint a rövidebb $E_1E_3$ körívből és a hosszabb $E_2E_4$ körívekből áll (1 pont)

Az $O_1$-en keresztül az $E_1E_2$ érintőszakasszal húzott párhuzamos metszéspontja $O_2E_2$-vel legyen $M$

Az $O_1MO_2$ derékszögű háromszögből

$E_1E_2 = O_1M = \sqrt{46^2 - 19^2} = \sqrt{1755} \approx 41{,}9\,\text{cm}$ (2 pont)

$\cos\alpha = \dfrac{19}{46}$ (1 pont)

ahonnan $\alpha \approx 65{,}6°$ (1 pont)

A hosszabb $E_2E_4$ körívhez tartozó középponti szög

$360° - 2\alpha \approx 228{,}8°$ (1 pont)

A hosszabb $E_2E_4$ körív hossza így $\dfrac{228{,}8°}{360°} \cdot 2 \cdot 20\pi =$ (1 pont)

$= 79$ cm (1 pont)

A rövidebb $E_1E_3$ körívhez tartozó középponti szög

$2\alpha \approx 131{,}2°$ (1 pont)

A rövidebb $E_1E_3$ körív hossza így $\dfrac{131{,}2°}{360°} \cdot 2\pi$

2,3 cm (1 pont)

Innen a feszes hajtószíj hossza megközelítőleg

$2 \cdot 41{,}9 + 79{,}9 + 2{,}3 = \mathbf{166\,cm}$ (1 pont)

**Összesen: 13 pont**

**17)** **Egy 1 méter oldalú négyzetbe egy második négyzetet rajzoltunk úgy, hogy a belsőnégyzet minden csúcsa illeszkedjen a külső négyzet egy-egy oldalára. A belső és a külső négyzet oldalainak aránya $5:7$.**

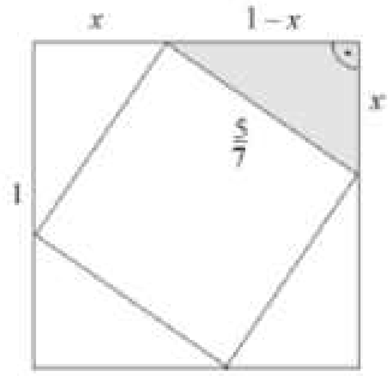
**a) Milyen arányban osztja két részre a belső négyzet csúcsa a külső négyzet oldalát? Az arány pontos értékét adja meg!** **(10 pont)**

**A belső négyzetbe egy újabb, harmadik négyzetet rajzolunk úgy, hogy a harmadik és a második négyzet oldalainak aránya is $5:7$. Ezt az eljárást aztán gondolatban végtelen sokszor megismételjük.**

**b) Mekkora lesz a kapott négyzetek kerületeinek az összege, ha a kiindulási négyzet kerülete is tagja a (végtelen sok tagú) összegnek?** **(6 pont)**

***Megoldás:***

a) Jó ábra felrajzolása (1 pont)




A belső négyzet oldala $\frac{5}{7}$ méter (1 pont)

A belső négyzet a külső négyzet oldalait $x$ és $1-x$-re bontja (1 pont)

A felosztás mind a 4 oldalon ismétlődik (1 pont)

Pitagorasz-tétel szerint $x^2+(1-x)^2=\left(\frac{5}{7}\right)^2$ (1 pont)

Ahonnan $2x^2-2x+\frac{24}{49}=0$ (1 pont)

Ennek megoldásai $x_1=\frac{4}{7}$ $x_2=\frac{3}{7}$ (2 pont)

Ahonnan $1-x_1=\frac{3}{7}$ $1-x_2=\frac{4}{7}$ (1 pont)

A belső négyzet a külső négyzet oldalait **3:4 arányban** osztja (1 pont)

b) *Lásd: Sorozatok 15. feladat*

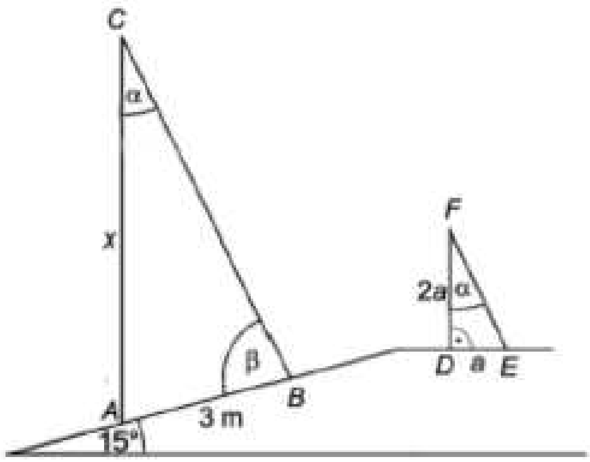
**Összesen: 16 pont**

**18)** **Egy 15°-os emelkedési szögű hegyoldalon álló függőleges fa egy adott időpontban a hegyoldal emelkedésének irányában 3 méter hosszú árnyékot vet. Ugyanebben az időpontban a közeli vízszintes fennsíkon álló turista árnyékának hossza éppen fele a turista magasságának. Hány méter magas a fa?**

**Válaszát egy tizedesjegyre kerekítve adja meg!** **(12 pont)**

***Megoldás:***

A szövegnek megfelelő, az adatokat helyesen feltüntető ábra. (2 pont)




Az $ACB$ és $DFE$ szögek egyenlők, mivel mindkettő a napsugarak és a függőleges által bezárt szög. (1 pont)

A $DEF$ derékszögű háromszögben:

$\text{tg}\alpha=\frac{a}{2a}=\frac{1}{2}$ (2 pont)

$\alpha\approx 26{,}57°$ (1 pont)

$BAC$ szög $(90°-15°=)75°$ (1 pont)

Így $\beta\approx 78{,}43°$. (1 pont)

(Szinusztétel az $ABC$ háromszögben:) $\frac{\sin 78,43°}{\sin 26,57°} = \frac{x}{3}$ (2 pont)

$x \approx 6,57$ (1 pont)

A fa tehát körülbelül **6,6 méter** magas. (1 pont)

**Összesen: 12 pont**

**19) Az *ABCDEF* szabályos hatszögben a rövidebb átló hossza $5\sqrt{2}$.**

**a) Számolja ki a hatszög területének pontos értékét! (6 pont)**

**b) Az *ABCDEF* hatszög oldalfelező pontjai által meghatározott szabályos hatszög területét jelölje $t_1$, a $t_1$ területű hatszög oldalfelező pontjai által meghatározott szabályos hatszög területét $t_2$, és így tovább, képezve ezzel a $\{t_n\}$ sorozatot. Számítsa ki a $\lim\limits_{n\to\infty}(t_1 + t_2 + ... + t_n)$ határértékét! (Pontos értékkel számoljon!) (10 pont)**

***Megoldás:***

a) Ha a hatszög oldalának hossza $a$, a rövidebb átló az $a$ oldalú szabályos háromszög magasságának kétszerese, (1 pont)

így $a\sqrt{3} = 5\sqrt{2}$, ahonnan $a = \frac{5\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\left(= \frac{5\sqrt{6}}{3}\right)$. (2 pont)

A szabályos hatszög területe 6 darab $a$ oldalú szabályos háromszög területének összege, (1 pont)

így $T = 6\frac{a^2\sqrt{3}}{4} = \mathbf{25\sqrt{3}}$ (2 pont)

b) A $t_1$ területű szabályos hatszög oldala az $ABC$ háromszög $AC$ oldalához (mely az eredeti hatszög rövidebb átlója) tartozó középvonala, (1 pont)

hossza $a_1 = \frac{5\sqrt{2}}{2}$, (1 pont)

$t_1 = 6\frac{a_1^{\,2}\sqrt{3}}{4} = \frac{75\sqrt{3}}{4}$ (1 pont)

A következő szabályos hatszög $t_2$ területét megkaphatjuk például úgy, hogy a $t_1$ területű hatszög szomszédos oldalfelező pontjait összekötő szakaszok által a hatszögből levágott háromszögek területének összegét levonjuk $t_1$-ből.

$t_2 = t_1 - 6\frac{\left(\frac{a_1}{2}\right)^2 \cdot \sin 120°}{2} = \frac{3 \cdot 75\sqrt{3}}{16}\left(= \frac{225\sqrt{3}}{16}\right)$. (2 pont)

A $\{t_n\}$ sorozat mértani sorozat, (1 pont)

amelynek hányadosa $q = \frac{t_2}{t_1} = \frac{3}{4}$. (1 pont)

A kérdéses határérték annak a mértani sornak az összege, amelynek első tagja $t_1 = \frac{75\sqrt{3}}{4}$, hányadosa pedig $q = \frac{3}{4}$. (1 pont)

Így $\lim\limits_{n\to\infty}(t_1 + t_2 + ... + t_n) = \frac{t_1}{1-q} =$ (1 pont)

$= \mathbf{75\sqrt{3}}$. (1 pont)

**Összesen: 16 pont**

**20) a) Egy téglalapot 720 darab egybevágó kis téglalapra daraboltunk szét. A kis téglalapok oldalai közül az egyik 1 cm-rel hosszabb, mint a másik. Hány cm hosszúak egy-egy kis téglalap oldalai, ha a nagy téglalap területe 2025 cm²? (7 pont)**

**b) Az 1, 2, 3, 4, 5, 6 számjegyekből összesen 720 olyan hatjegyű szám képezhető, melynek számjegyei között nincsenek egyenlők. Ezek között hány 12-vel osztható van? (5 pont)**

***Megoldás:***

a) Egy kis téglalap oldalainak hossza $x$ cm, illetve $x+1$ cm, területe $x\cdot(x+1)\ \text{cm}^2$. (1 pont)

A feladat szövegéből kiindulva: $720\cdot x\cdot(x+1)=2025$. (1 pont)

A zárójelet felbontva, majd 45-tel leegyszerűsítve:

$16x^2+16x-45=0$ (1 pont)

A két gyöke $x$-nek: $x_1=1{,}25$; $x_2=-2{,}25$. (1 pont)

A negatív gyök nem lehet megoldása a feladatnak! (1 pont)

A téglalap rövidebb oldala tehát **1,25 cm**, hosszabb oldala pedig **2,25 cm** hosszú. (1 pont)

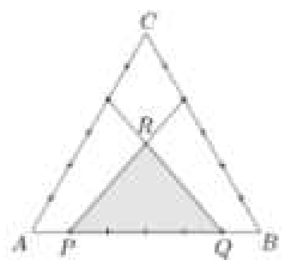
Ellenőrzés: $720\cdot 1{,}25\cdot 2{,}25=2025$ igaz, tehát a válasz helyes. (1 pont)

b) *Lásd: Számelmélet 5. feladat*

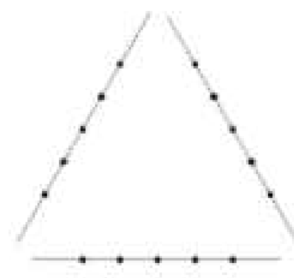
**Összesen: 12 pont**

**21) Megadtunk három egyenest, és mindegyiken megadtunk öt-öt pontot az ábra szerint.**

**a) Hány olyan szakasz van, amelynek mindkét végpontja az ábrán megadott 15 pont valamelyike, de a szakasz nem tartalmaz további pontot a megadott 15 pont közül? (6 pont)**




**Az egyenlő oldalú *ABC* háromszög 18 egység hosszúságú oldalait hat-hat egyenlő részre osztottuk, és az ábra szerinti osztópontok összekötésével megrajzoltuk a *PQR* háromszöget.**

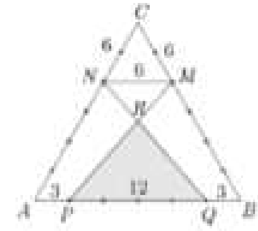


**b) Számítsa ki a *PQR* háromszög területének pontos értékét! (10 pont)**

***Megoldás:***

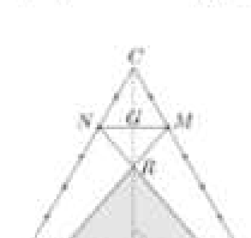
a) *Lásd: Kombinatorika 31. feladat*

b) Az ábra jelöléseit használjuk. A *CNM* háromszög egy 6 egység oldalú szabályos háromszög. (2 pont)




A *CNM* szabályos háromszög magassága az *ABC* szabályos háromszög magasságának a harmada $\left(CG=\frac{1}{3}\cdot CF\right)$: (1 pont)

$CG=\left(\frac{1}{3}\cdot 18\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=\right)3\sqrt{3}$, (1 pont)




a *PQMN* trapéz magassága pedig ennek a kétszerese: $FG=6\sqrt{3}$ (1 pont)

A $PQR$ háromszög hasonló az $MNR$ háromszöghöz, mert szögeik páronként egyenlők (csúcsszögek, illetve váltószögek). (1 pont)

A két háromszög hasonlóságának aránya $2:1$, (1 pont)

így a megfelelő oldalaikhoz tartozó magasságainak aránya is ennyi. (1 pont)

Ezért $FR = 4\sqrt{3}$, (1 pont)

és a $PQR$ **háromszög területe** $\left(\frac{12 \cdot 4\sqrt{3}}{2} =\right) \mathbf{24\sqrt{3}}$ **(területegység).** (1 pont)

**Összesen: 16 pont**

**22) Egy televíziókészülék termékleírásában szereplő „16:9-es típus" azt adja meg, hogy mennyi a téglalap alakú tv-képernyő két szomszédos oldalhosszának aránya, a „40 colos" jellemző pedig a képernyő átlójának a hosszát adja meg col-ban $(1 \text{ col} \approx 2{,}54 \text{ cm})$.**

**a) Számítsa ki a 40 colos, 16:9-es képernyő oldalainak hosszát! Válaszát cm-ben, egy tizedesjegyre kerekítve adja meg! (6 pont)**

**b) Két 16:9-es képernyő közül az elsőnek 69%-kal nagyobb a területe, mint a másodiknak. Hány százalékkal nagyobb az első képernyő átlója, mint a másodiké? (5 pont)**

***Megoldás:***

a) A képernyő oldalainak hosszát (cm-ben) jelölje $16x$ és $9x$. (1 pont)

40 col = 101,6 cm (1 pont)

A Pitagorasz-tétel szerint: $(16x)^2 + (9x)^2 = 101{,}6^2$ (1 pont)

$337x^2 = 10322{,}56$ (1 pont)

Ebből mivel $x > 0$ $x \approx 5{,}535$ (cm). (1 pont)

A képernyő oldalainak hossza tehát $(16x \approx)$ **88,6 cm és** $(9x \approx)$ **49,8 cm.** (1 pont)

b) Az első képernyő területe a második területének 1,69-szerese. (1 pont)

A két (téglalap alakú) képernyő hasonló, ezért (1 pont)

a területük aránya a hasonlóságuk arányának négyzetével egyenlő. (1 pont)

A képernyők hasonlóságának (és így átlóik hosszának) aránya $\sqrt{1{,}69} = 1{,}3$. (1 pont)

Az első képernyő átlója **30%-kal nagyobb**, mint a másodiké (1 pont)

**Összesen: 11 pont**

**23) a) Igazolja a következő állítást: ha egy négyszög szögei valamilyen sorrendben egy számtani sorozat egymást követő tagjai, akkor a négyszög húrnégyszög vagy trapéz! (6 pont)**

**b) Fogalmazza meg az előző állítás megfordítását, és döntse el a megfordított állításról, hogy igaz vagy hamis! Válaszát indokolja! (3 pont)**

**Egy geometriai építőkészletben csak olyan pálcikák vannak, amelyek hossza centiméterben mérve egész szám, és mindenféle lehetséges hosszúság előfordul 1 cm-től 12 cm-ig. (Mindegyik fajta pálcikából elegendően sok van a készletben.)**

**c) Hány különböző módon választhatunk ki 4 pálcikát a készletből úgy, hogy belőlük egy 24 cm kerületű érintőnégyszöget lehessen építeni? (Két kiválasztást különbözőnek tekintünk, ha az egyik kiválasztás 4**

**pálcikája nem állítható párba a másik kiválasztás 4 pálcikájával úgy, hogy mind a 4 párban egyenlő hosszú legyen a két pálcika. Tudjuk továbbá, hogy ha *a, b, c, d* pozitív számok, és $a+c=b+d$, akkor az *a, b, c, d* hosszúságú szakaszokból szerkeszthető négyszög.) (7 pont)**

***Megoldás:***

a) Legyen a négyszög legkisebb szöge $\alpha$ fok, a sorozat differenciája pedig $d$ fok $(d \geq 0)$. Ekkor a négyszög szögei (valamilyen sorrendben) $\alpha, \alpha+d, \alpha+2d$ és $\alpha+3d$ fok nagyságúak. (1 pont)

A négyszög belső szögeinek összege $360^\circ$, ezért $4\alpha+6d=360$, (1 pont)
vagyis $2\alpha+3d=180$. (1 pont)

$2\alpha+3d=(\alpha+d)+(\alpha+2d)$, ami azt jelenti, hogy a négyszög két-két szögének összege $180^\circ$. (1 pont)

Ha a két szög szomszédos, akkor a négyszög trapéz, (1 pont)
ha pedig szemközti, akkor húrnégyszög.

Tehát az **állítást igazoltuk.** (1 pont)

b) A megfordítás: **Ha egy négyszög trapéz vagy húrnégyszög, akkor a szögei (valamilyen sorrendben) egy számtani sorozat szomszédos tagjai.** (1 pont)

A megfordítás **hamis.** (1 pont)

Egy ellenpélda. Például: egy trapéz, amelynek szögei $50^\circ$, $70^\circ$, $110^\circ$ és $130^\circ$ nagyságúak. (1 pont)

c) *Lásd: Kombinatorika 34. feladat*

**Összesen: 16 pont**

**24) A fénymásoló gépekhez is használt téglalap alakú papírlapok mindegyikének olyan a méretezése, hogy a hosszabb és a rövidebb oldal aránya (megközelítőleg) $\sqrt{2}$. Ezt a számot röviden a téglalap alakú papírlap *méretarányának* is nevezik.**

**a) Mutassa meg, hogy ha egy $\sqrt{2}$ méretarányú papírlapot félbevágunk úgy, hogy a vágási él merőleges a papírlap hosszabb oldalára, akkor az így keletkező két egybevágó papírlap ugyancsak $\sqrt{2}$ méretarányú lesz! (4 pont)**

**A szabványos papírlapok méretét egy nagybetűvel és a betű után írt természetes számmal jelölik (például A0, A1, B5). Az A0-s papírlap méretaránya $\sqrt{2}$, a területe pedig éppen 1 m².**

**b) Számítsa ki az A0-s papírlap oldalainak hosszát egész milliméterre kerekítve! (4 pont)**

**Ha az A0-s papírlapot hosszabb élére merőlegesen félbevágjuk, akkor két A1-es papírlapot kapunk. Az eljárást tovább folytatva kapjuk az A3-as, A4-es, A5-ös papírlapokat. A leggyakrabban használt irodai másolópapír A4-es méretű és „80 g-os". A „80 g-os" jelzés azt jelenti, hogy 1 m² területű másolópapír tömege 80 gramm.**

**c) Egy csomagban 500 darab A4-es „80 g-os" papírlap van. Hány kg egy ilyen csomag tömege, ha a csomagolóanyag tömege 20 g? (5 pont)**

***Megoldás:***

a) Az eredeti papírlap rövidebb oldala legyen $x$ hosszúságú, ekkor a hosszabb oldala $\sqrt{2}\,x$ hosszúságú. (1 pont)

A félbevágással kapott papírlap egyik oldalának hossza $x$, a másik oldalának hossza pedig $\frac{\sqrt{2}}{2}x$ lesz. (1 pont)

(Mivel $\frac{\sqrt{2}}{2}<1$, ezért) $\frac{\sqrt{2}}{2}x$ a rövidebb oldal hosszúsága. (1 pont)

A félbevágással kapott papír méretaránya $\boldsymbol{x : \frac{\sqrt{2}}{2}x = \sqrt{2}}$, ez valóban megegyezik az eredetivel. (1 pont)

b) (Ha a rövidebb oldal hossza $x$ méter, akkor) a papír területe: $x \cdot \sqrt{2}x = 1$ (m²). (1pont)

A papír rövidebb oldala $x=\sqrt{\frac{1}{\sqrt{2}}} \approx 0{,}841$ (cm), azaz 841 (mm), (2 pont)

hosszabb oldala $\sqrt{2}\,x \approx$ **1189 (mm).** (1 pont)

c) Egy A4-es lap az 1 m2 -es A0-s lap négyszeri félbevágásával kapható (A0→A1→A2→A3→A4), (1 pont)
tehát 16 darab A4-es lap együttes területe 1 m². (1 pont)
Az 500 darab A4-es lap területe összesen 31,25 m². (1 pont)
Ezért 1 csomag tömege $31{,}25 \cdot 80 + 20 = 2520$ gramm, (1 pont)
azaz **2,52 kg**. (1 pont)

**Összesen: 13 pont**

**25) Egy kör középpontja egy derékszögű háromszög $b$ hosszúságú befogójára illeszkedik. A kör érinti a $c$ hosszúságú átfogót és az $a$ hosszúságú befogó egyenesét is. Andrea és Petra egymástól függetlenül kifejezték a kör sugarának hosszát a háromszög oldalainak hosszával. Andrea szerint a kör sugara $R_A = \frac{ab}{a+c}$, Petra szerint pedig $R_P = \frac{ac-a^2}{b}$.**

**a) Igazolja, hogy $R_A = R_P$! (5 pont)**

**b) Bizonyítsa be, hogy Andrea képlete helyes! (4 pont)**

**Egy derékszögű háromszög oldalai $a = 8$ cm, $b = 6$ cm és $c = 10$ cm.**

**Megrajzoltuk azt a két kört, melyek középpontja a háromszög egyik, illetve másik befogójára illeszkedik, és amelyek érintik a háromszög másik két oldalegyenesét.**

**c) Számítsuk ki, hogy a két körnek a háromszög belsejébe eső $M$ metszéspontja milyen messze van a derékszögű $C$ csúcstól! (7 pont)**

***Megoldás:***

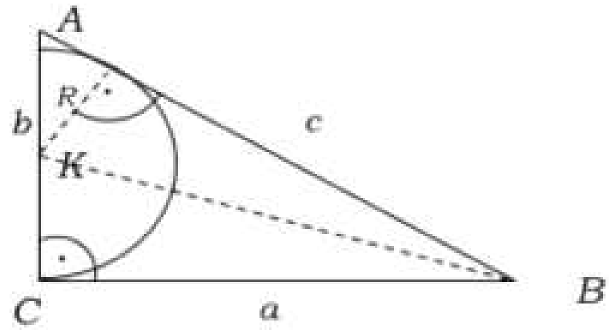
a) Azt állítjuk, hogy $\frac{ab}{a+c} = \frac{ac-a^2}{b}$ igaz $(a,b,c>0)$ (1 pont)

Mindkét oldalt $a$-val osztva, majd $b(c+a)$-val szorozva: $b^2 = (c-a)(c+a)$ (1 pont)

Átalakítva: $a^2+b^2=c^2$, ami a Pitagorasz-tétel miatt minden derékszögű háromszögre igaz. (1 pont)
Az alkalmazott átalakítások ekvivalensek voltak, (1 pont)

ezért az eredeti $\frac{ab}{a+c}=\frac{ac-a^2}{b}$ **állítás is igaz** (tehát $R_A = R_P$). (1 pont)

b) Helyes ábra. (1 pont)




A derékszögű háromszög területét kétféleképpen is felírhatjuk: $T=\frac{ab}{2}$, illetve

$T=T_{KCB\Delta}+T_{KAB\Delta}=\frac{aR}{2}+\frac{cR}{2}$ (1 pont)

Tehát $ab=aR+cR$ (1 pont)

vagyis $\boldsymbol{R=\frac{ab}{a+c}}$. (Ezt kellett bizonyítani.) (1 pont)

c) Helyezzük el a derékszögű háromszöget és a két kört derékszögű koordinátarendszerben. (Az egység legyen 1 cm hosszú.) A koordinátái $A(0;6)$ B pont koordinátái $B(8;0)$; $C(0;0)$ (1 pont)

A két kör sugara: $R_a=\frac{ab}{b+c}=\frac{48}{16}=3$, $R_b=\frac{ab}{a+c}=\frac{48}{18}=\frac{8}{3}$. (2 pont)

A körök egyenlete: $x^2+y^2-6x=0$, illetve $x^2+y^2-\frac{16}{3}y=0$ (1 pont)

A két kör egyenletéből alkotott egyenletrendszer megoldása megadja az $M$ pontot: $M\left(\frac{384}{145};\frac{432}{145}\right)$ (2 pont)

A $CM$ távolság: $\left(\sqrt{\frac{384^2+432^2}{145^2}}=\frac{48}{\sqrt{145}}\right)\approx$ **3,99 (cm)** (1 pont)

**Összesen: 16 pont**

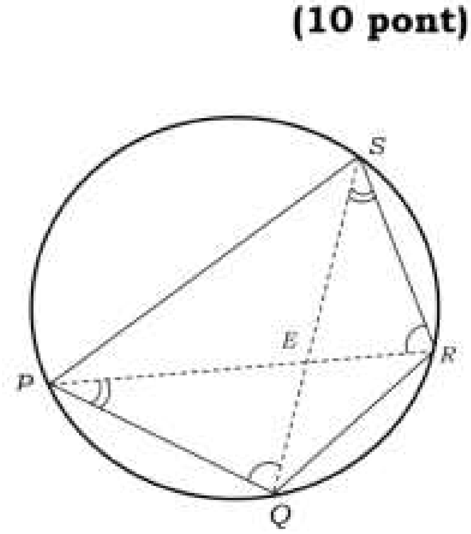
**26) a) A *PQRS* húrnégyszöget a *PR* és a *QS* átlók megrajzolásával négy háromszögre bontottuk. Igazolja, hogy ezek közül a két-két szemközti háromszög hasonló egymáshoz! (4 pont)**

**Az *ABCD* húrnégyszög *AB* oldala a négyszög körülírt körének egyik átmérője. A négyszög *BC* oldala 3 cm, a *CD* oldala 5 cm hosszú, továbbá $BCD\sphericalangle=120°$.**

**b) Számítsa ki a négyszög *BD* átlójának, *AB* oldalának és *AD* oldalának hosszát, valamint a négyszög többi szögét! (10 pont)**

***Megoldás:***

a) Az átlók metszéspontját jelölje $E$. A kerületi szögek tétele miatt $PQS\sphericalangle=PRS\sphericalangle$ és $QPR\sphericalangle=QSR\sphericalangle$ (azonos ívhez tartozó kerületi szögek). (2 pont)




A $PEQ$ és az $SER$ háromszögekben két-két szög megegyezik (így a harmadik is), ezért ez a két háromszög hasonló. (1pont)

Ugyanígy bizonyíthatjuk a $QER$ és a $PES$ háromszögek hasonlóságát is. (1 pont)

b) $BCD$ háromszögben felírjuk a koszinusztételt:

$BD^2=3^2+5^2-2\cdot3\cdot5\cdot\cos120°$. (1 pont)

$BD=7$ (cm) (1 pont)

(A húrnégyszögek tétele miatt) az $ABCD$ négyszög $DAB$ szöge $(180° - 120° =)$ $60°$-os, (1 pont)

a Thalész-tétel miatt pedig $ADB\angle = 90°$, (1 pont)

ezért az $ADB$ háromszög egy szabályos háromszög fele. (1 pont)

$AD = \frac{BD}{\sqrt{3}} = \frac{7}{\sqrt{3}} \approx 4,04$ (cm)

(2 pont)

$AB = 2AD \approx 8,08$ (cm)

Szinusztétellel a $BCD$ háromszögből:

$\frac{\sin CBD\sphericalangle}{5} = \frac{\sin 120°}{7}$, $\left(\sin CBD\sphericalangle = \frac{5 \cdot \sin 120°}{7} \approx 0,6186\right)$ (1 pont)

$\boldsymbol{CBD\sphericalangle \approx 38,2°}$

$\boldsymbol{ABD\sphericalangle \approx 68,2°}$ (2 pont)

$\boldsymbol{ADC\sphericalangle \approx 111,8°}$

**Összesen: 14 pont**

**27) A Téglácska csokiszelet gyártója akciót indít: ha a szerencsés vásárló a csokiszelet csomagolásának belső oldalán a „Nyert" feliratot találja, akkor ezzel egy újabb szelet csokit nyert. A gyártó úgy reklámozza a termékét, hogy „minden ötödik csoki nyer". (Ez úgy tekinthető, hogy minden egyes csoki 0,2 valószínűséggel nyer.)**

**a) Juli öt szelet csokoládét vásárol. Mennyi annak a valószínűsége, hogy az öt szelet csoki között legalább egy nyerő csoki lesz? (4 pont)**

**Pali is öt szelet csokoládét vásárolt, és végül hét szelet csokival tért haza a boltból, mert nyert még kettőt.**

**b) Vizsgálja meg, hogy az alábbi két esemény közül melyiknek nagyobb a valószínűsége!**

**I. Ha valaki megvásárol öt szelet csokit, akkor azok között két nyerő csoki lesz, de a két nyereménycsoki egyike sem nyer.**

**II. Ha valaki megvásárol öt szelet csokit, akkor azok között egy nyerő csoki lesz, a nyereménycsoki nyer egy hetedik szelet csokit, de az már nem nyer. (7 pont)**

**Egy másik akcióban a csokiszelet térfogatát 20%-kal megnövelték, de továbbra is változatlan áron adták. A csokiszelet téglatest alakú, az eredeti és a megnövelt szelet (matematikai értelemben) hasonló. Az akciós szelet 1 cm-rel hosszabb az eredeti csokiszeletnél.**

**c) Határozza meg az eredeti csokiszelet hosszúságát! Válaszát egész cm-re kerekítve adja meg! (5 pont)**

***Megoldás:***

a) *Lásd: Valószínűségszámítás 40. feladat*

b) *Lásd: Valószínűségszámítás 40. feladat*

c) A csokiszelet térfogatának 20%-os növekedése azt jelenti, hogy a térfogata 1,2-szeresére változott. (1 pont)

(Hasonló testek térfogatának aránya a hasonlóság arányának köbe, így) a hasonlóság aránya $\sqrt[3]{1,2} \approx 1,063$. (1 pont)

(Az eredeti szelet hosszúságát x-szel jelölve) $1,063x \approx x + 1$, (1 pont)

ahonnan $x \approx 15,9$. (1 pont)

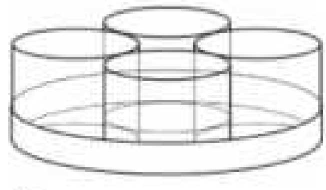
Az eredeti szelet hossza (a kért kerekítéssel) **16 cm.** (1 pont)

**Összesen: 16 pont**

**28)**

**a) Az *ABCD* négyzet körülírt körén felvettünk egy olyan *P* pontot, amelyik nem csúcsa a négyzetnek. Bizonyítsa be, hogy $AP^2 + CP^2 = BP^2 + DP^2$.** **(4 pont)**

**Egy cég az általa forgalmazott poharakat négyesével csomagolja úgy, hogy a poharakhoz még egy tálcát is ad ajándékba. A 20 cm (belső) átmérőjű, felül nyitott forgáshenger alakú tálcára négy egyforma (szintén forgáshenger alakú) poharakat tesznek úgy, hogy azok szorosan illeszkednek egymáshoz és a tálca oldalfalához is.**



**b) Igazolja, hogy a poharak alapkörének sugara nagyobb 4,1 cm-nél!** **(5 pont)**

**A pohár fala 2,5 mm vastag, belső magassága 11 cm.**

**c) Igaz-e, hogy a pohárba belefér 5 dl üdítő?** **(4 pont)**

***Megoldás:***

a) *Lásd: Térgeometria 14. feladat*

b) Helyezzünk el négy darab 4,1 cm alapkör sugarú poharat egy négyzet csúcsaiban úgy, hogy az alapkörök középpontja négyzetcsúcs legyen, és a szomszédos csúcsokban elhelyezett poharak érintsék egymást. (1 pont)

A négyzet oldala ($2 \cdot 4{,}1 =$) 8,2 cm, átlója pedig ($8{,}2 \cdot \sqrt{2} \approx 11{,}597 <$) 11,6 cm hosszú. (1 pont)

$11{,}6 + 2 \cdot 4{,}1 = 19{,}8$, ezért a négyzet középpontja körül 9,9 cm-es sugárral megrajzolt körön belül lesz mind a négy pohár alapköre. (1 pont)

Ezért, ha a 4,1 cm sugarú poharakat egy 20 cm átmérőjű tálcára helyezzük, akkor azok nem érinthetik egymást és a tálca oldalfalát is a feladat szövegében leírt módon. (1 pont)

Ehhez a poharak alapkörének sugarát növelni kell, tehát az állítás **igaz** (1 pont)

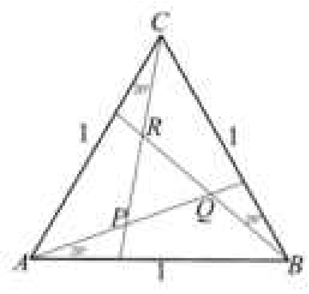
c) *Lásd: Térgeometria 14. feladat*

**Összesen: 13 pont**

**29) a) *Ha egy háromszög szabályos, akkor a körülírt körének középpontja megegyezik a beírt körének középpontjával.***

**Fogalmazza meg a fenti (igaz) állítás megfordítását, és igazolja, hogy a megfordított állítás is igaz!** **(4 pont)**

**Az egységnyi oldalú *ABC* szabályos háromszög minden csúcsánál behúztunk egy-egy szögharmadoló egyenest, így az ábrán látható *PQR* szabályos háromszöget kaptuk.**




**b) Számítsa ki a *PQR* háromszög oldalának hosszát!** **(7 pont)**

**A piros, kék, zöld és sárga színek közül három szín felhasználásával úgy színezzük ki az ábrán látható *ABQ*, *BCQ*, *CQR*, *ACP* és *PQR* háromszögek belsejét, hogy a közös határszakasszal rendelkező háromszögek különböző színűek legyenek. (Egy-egy háromszög színezéséhez csak egy-egy színt használunk.)**

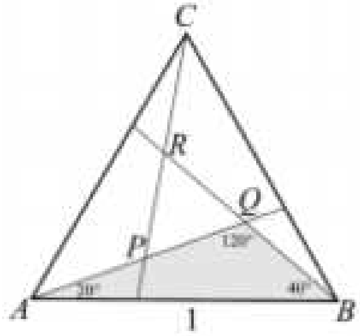
**c) Összesen hány különböző színezés lehetséges?** **(5 pont)**

***Megoldás:***

a) Az állítás megfordítása: Ha egy háromszög körülírt körének középpontja megegyezik a beírt körének középpontjával, akkor a háromszög szabályos. (1 pont)

A beírt kör középpontja (a háromszög belső pontja) a belső szögfelezők közös pontja, amely most egyenlő távolságra van a háromszög csúcsaitól (mert a körülírt körnek is középpontja), (1 pont)
ezért a két kör közös középpontját a háromszög csúcsaival összekötő szakaszok három egyenlő szárú háromszögre bontják az eredeti háromszöget. A szögfelezők miatt ezeknek a háromszögeknek az alapon fekvő szögeik mind ugyanakkorák. (1 pont)
Ezért az eredeti háromszög három belső szöge egyenlő nagyságú, tehát az **eredeti háromszög szabályos**. (1 pont)

b) Az $ABQ$ háromszög szögei $20°$, $40°$ és $120°$. (1 pont)




(Az $ABQ$ háromszögből szinusztétellel:) $\frac{BQ}{1} = \frac{\sin 20°}{\sin 120°}$, (1 pont)

ahonnan $BQ \approx 0{,}395$. (1 pont)

$\frac{AQ}{1} = \frac{\sin 40°}{\sin 120°}$, (1 pont)

ahonnan $AQ \approx 0{,}742$. (1 pont)

$BQ = AP$ (mert az ábra forgásszimmetrikus) (1 pont)

Így $PQ = AQ - AP \approx \mathbf{0{,}347}$. (1 pont)

c) *Lásd: Kombinatorika 39. feladat*

**Összesen: 16 pont**

**30) Egy háromszög oldalainak hossza 7 cm, 9 cm és 11 cm.**

**a) Igazolja, hogy a háromszög hegyesszögű! (5 pont)**

**Egy derékszögű háromszög oldalainak centiméterben mért hossza egy számtani sorozat három egymást követő tagja.**

**b) Igazolja, hogy a háromszög oldalainak aránya $3:4:5$. (5 pont)**

**c) Ennek a derékszögű háromszögnek a területe $121{,}5\ \text{cm}^2$. Számítsa ki a háromszög oldalainak hosszát! (3 pont)**

***Megoldás:***

a) A legnagyobb szög a legnagyobb (11 cm hosszú) oldallal szemben van. (2 pont)
Jelölje ezt a szöget $\alpha$. Használjuk fel a koszinusztételt:

$\cos\alpha = \frac{7^2 + 9^2 - 11^2}{2\cdot 7\cdot 9} = \frac{1}{14} (\approx 0{,}0714)$. (2 pont)

$\boldsymbol{\alpha \approx 85{,}9°}$, tehát a háromszög valóban hegyesszögű. (1 pont)

b) Jelölje a háromszög oldalainak hosszát $a-d$, $a$ és $a+d$ $(0 < d < a)$. (1 pont)

A Pitagorasz-tétel alapján $(a-d)^2 + a^2 = (a+d)^2$. (1 pont)

A négyzetre emeléseket elvégezve és rendezve: $a^2 = 4ad$. (1 pont)

($a \neq 0$-val osztva) $a = 4d$. (1 pont)

A háromszög oldalai tehát $\mathbf{3d}$, $\mathbf{4d}$ és $\mathbf{5d}$, az oldalak aránya ezért valóban $3:4:5$. (1 pont)

c) A háromszög területe: $\frac{3d\cdot 4d}{2} = 121{,}5$. (1 pont)

Innen $12d^2 = 243$, azaz ($d > 0$ miatt) $d = 4{,}5$. (1 pont)

A háromszög oldalainak hossza tehát **13,5 cm**, **18 cm** és **22,5 cm**. (1 pont)

**Összesen: 13 pont**

**31)**

a) **Döntse el, hogy igaz-e a következő kijelentés! Válaszát indokolja!**
**Van olyan $G_1$, illetve $G_2$ fagráf, amelyre igaz, hogy a $G_2$ csúcsainak száma kétszerese a $G_1$ csúcsai számának, és a $G_2$ éleinek száma is kétszerese a $G_1$ élei számának. (A fagráfnak van legalább egy csúcsa.)** **(3 pont)**

**Az *A, B, C, D, E, F* kereskedőcégek mindegyike mind az öt másik céggel kötött egy-egy üzletet az előző hónapban (bármelyik két cég között pontosan egy üzletkötés jött létre). Az ellenőrző hatóság véletlenszerűen kiválaszt a hat cég előző havi (egymás közötti) üzletkötései közül négyet, és azokat ellenőrzi.**

b) **Mekkora annak a valószínűsége, hogy az *A* vagy a *B* cég üzletkötései közül is ellenőriznek legalább egyet?** **(6 pont)**

**Az egyik cég azzal bízott meg egy reklámügynökséget, hogy tervezzen egy nagy méretű, függőlegesen leomló hirdetővásznat a budapesti Lánchíd fő tartóláncának egy részére.**


**A híd két támpillérének *PV* távolsága kb. 200 méter. A fő tartólánc alakja jó közelítéssel egy olyan (függőleges síkú) parabolának az íve, amelynek a tengelypontja a *PV* felezőpontja (*U*), a tengelye pedig a *PV* felezőmerőlegese. A lánc tartópillérnél becsült legnagyobb magassága $PQ = 16$ méter, a vászon tervezett szélessége $PS = 50$ méter. A tervek szerint a *QR* íven felfüggesztett hirdetővászon az ábrán sötétített *PQRS* területet fedi majd be (*RS* merőleges *PS*-re).**

c) **Hány $m^2$ területű vászon beszerzésére lesz szükség, ha a rögzítések miatt 8% veszteséggel számol a tervező?** **(7 pont)**

***Megoldás:***

a) *Lásd: Gráfelmélet 11. feladat*

b) *Lásd: Valószínűségszámítás 44. feladat*

c) Vegyünk fel egy alkalmas derékszögű koordinátarendszert, amelyben legyen $U(0;0)$ és $P(100;0)$. Ekkor $Q(100;16)$ és $S(50;0)$ (a tengelyeken az egységeket méterben mérjük). (1 pont)

Az *U*, *Q* pontokon átmenő parabola egyenletét keressük, melynek a szimmetriatengelye az *y* tengely. Mivel a parabola tengelypontja az origó, azért egyenlete $y = cx^2$ alakú. (1 pont)

A parabolán rajta van a $Q(100;16)$ pont, tehát $16 = c \cdot 100^2$, (1 pont)

ahonnan $c = 0,0016 = \frac{1}{625}$ ezért a parabola egyenlete $y = \frac{x^2}{625}$. (1 pont)

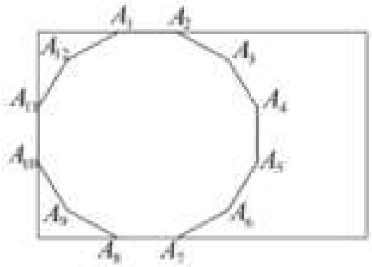
A hirdetővászon által fedett $PQRS$ terület (ezt az $x \mapsto \frac{x^2}{625}$ másodfokú függvény $[50;100]$ intervallumon vett határozott integrálja adja meg): $\int_{50}^{100} \frac{x^2}{625}\,dx = \left[\frac{x^3}{1875}\right]_{50}^{100} =$ (1 pont)

$= \frac{100^3 - 50^3}{1875} = 466\frac{2}{3}$ (1 pont)

Ha 8% veszteséggel kell számolni, $466\frac{2}{3} : 0,92 \approx \mathbf{507}\,\mathbf{m^2}$ vászonra lesz szükség. (1 pont)

**Összesen: 16 pont**

**32) Egy nagy méretű, köztéren felállítandó óra számlapját szabályos 12-szög alakúra tervezik. Az $A_1A_2...A_{12}$ számlapot egy $260\,\text{cm} \times 180\,\text{cm}$-es téglalap alakú alumíniumlemezből vágják ki az ábra szerint.**

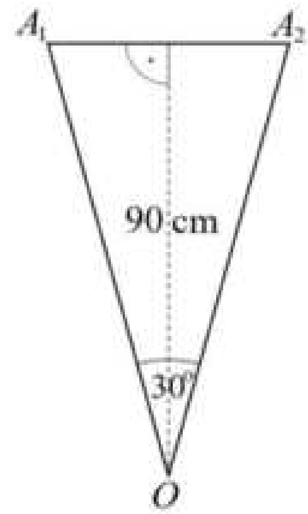



**a) Mekkora tömegű az óralap, ha az alumíniumlemez vastagsága $2\,\text{mm}$, és $1\,\text{m}^3$ alumínium tömege $2700\,\text{kg}$? (7 pont)**

**b) Jelöljük meg a szabályos tizenkétszög $A_1$ csúcsát! Hány olyan derékszögű háromszög van, amelynek egyik csúcsa az $A_1$, a másik két csúcsa pedig szintén a tizenkétszög valamelyik két csúcsával azonos? (Két háromszöget akkor tekintünk különbözőnek, ha legalább az egyik csúcsuk különböző.) (5 pont)**

***Megoldás:***

a) A szabályos 12-szög felbontható 12 darab egybevágó, $30^\circ$-os szárszögű egyenlő szárú háromszögre. (1 pont)




A 12-szög középpontja $O$, az $A_1OA_2$ egyenlő szárú háromszög alapjához tartozó magasság $m = 90$, (1 pont)

alapja $a = A_1A_2 = 2 \cdot 90 \cdot \text{tg}\,15^\circ \approx 48,2\ (\text{cm})$. (1 pont)

A 12-szög területe $12 \cdot \frac{am}{2} \approx 26000\ \text{cm}^2$. (1 pont)

Az óralap térfogata $26000 \cdot 0,2 = 5200\ \text{cm}^3 \approx$ (1 pont)

$\approx 0,0052\ \text{m}^3$, (1 pont)

tömege $0,0052 \cdot 2700 \approx \mathbf{14\ kg}$. (1 pont)

b) A Thalész-tétel miatt derékszögű háromszöget akkor kapunk, ha a háromszög leghosszabb oldala a 12-szög köré írt körének átmérője, tehát ennek az oldalnak a két végpontja a 12-szög két átellenes csúcsa. (1 pont)

Ha $A_1$ az átfogó egyik végpontja, akkor a másik végpont $A_7$. (1 pont)

A háromszög harmadik (derékszögű) csúcsa ekkor a maradék 10 csúcs közül bármelyik lehet. Ez 10 lehetőség. (1 pont)

Ha $A_1$ a derékszögű csúcs, akkor a háromszög átfogója 5-féle lehet: $A_2A_8$; $A_3A_9$; $A_4A_{10}$; $A_5A_{11}$ vagy $A_6A_{12}$. Ez 5 lehetőség. (1 pont)

Összesen $10 + 5 = \mathbf{15}$ különböző, a feltételeknek megfelelő derékszögű háromszög van. (1 pont)

**33)** **a) Határozza meg az alábbi két állítás logikai értékét (igaz vagy hamis)! Válaszait indokolja!**

**I. Ha egy trapéznak 2-2 szöge egyenlő, akkor a trapéz húrtrapéz.**

**II. Ha egy háromszögben $a = b$, akkor $\sin 3\alpha = \sin 3\beta$.**

**(A háromszög oldalai *a*, *b* és *c*, a velük szemközti szögek rendre $\alpha$, $\beta$ és $\gamma$.)** **(6 pont)**

**b) Fogalmazza meg a II. állítás megfordítását, és a megfordított állításról is döntse el, hogy igaz vagy hamis! Válaszát indokolja!** **(4 pont)**

**Egy matematika-vizsgafeladatban három állítás logikai értékét kell meghatározni (igaz vagy hamis). Három helyes válasz esetén 2, két helyes válasz esetén 1, kettőnél kevesebb helyes válasz esetén 0 pontot kap a vizsgázó. Béla tanult egy keveset, de bizonytalan a tudása: mindegyik kérdésnél 0,6 valószínűséggel találja el a helyes választ.**

**c) Számítsa ki annak a négy eseménynek a valószínűségét, hogy Béla sikeres tippjeinek száma 3, 2, 1, illetve 0, és határozza meg Béla pontszámának várható értékét!** **(6 pont)**

***Megoldás:***

a) I. Az állítás **hamis.** (1 pont)

Ellenpélda az olyan trapéz, amelynek 2-2 szemközti szöge egyenlő, míg a szomszédos szögei különbözők. (2 pont)

II. Az állítás **igaz**. (1 pont)

Ha $a = b$, akkor $\alpha = \beta$, így $3\alpha = 3\beta$, tehát valóban $\sin 3\alpha = \sin 3\beta$. (2 pont)

b) A II. állítás megfordítása:

**Ha egy háromszögben $\sin 3\alpha = \sin 3\beta$, akkor $a = b$.** (1 pont)

A II. állítás megfordítása **hamis.** (1 pont)

Ha $3\alpha = 180° - 3\beta$ (azaz $\alpha + \beta = 60°$), akkor $\sin 3\alpha = \sin 3\beta$, de ($\alpha \neq 30°$ esetén) $a \neq b$. (2 pont)

c) *Lásd: Valószínűségszámítás 45. feladat*

**Összesen: 16 pont**

**34)** **Az *ABCDEFGH* négyzetes oszlop *AE*, *BF*, *CG*, *DH* élei merőlegesek az *ABCD* alaplapra. Az *A* csúcsból kiinduló három él hossza $AB = AD = 8$ egység, $AE = 15$ egység.**

**a) Számítsa ki az $\overrightarrow{EF}$ és $\overrightarrow{AH}$ vektorok skaláris szorzatát!** **(3 pont)**

**A négyzetes oszlop köré egy *P* csúcspontú forgáskúpot illesztünk úgy, hogy az *A*, *B*, *C*, *D* csúcsok a kúp alaplapjára, az *E*, *F*, *G*, *H* csúcsok pedig a kúp palástjára illeszkedjenek. (A kúp és a négyzetes oszlop tengelye egybeesik.) A kúp magassága 45 egység.**


**b) Számítsa ki a kúp felszínét!** **(7 pont)**

**c) Hány olyan derékszögű háromszög van, amelynek egyik befogója 15 egység hosszú, és a másik két oldala is egész szám hosszúságú? (Az egybevágó háromszögeket nem tekintjük különbözőknek.)** **(6 pont)**

***Megoldás:***

a) *Lásd: Koordinátageometria 25. feladat*

b) *Lásd: Térgeometria 30. feladat*

c) Az ismeretlen befogó hossza legyen $b$, az átfogó hossza pedig $c$ (és mindkettő pozitív egész szám). A Pitagorasz-tétel miatt $15^2 + b^2 = c^2$, innen $225 = c^2 - b^2 = (c-b)(c+b)$. (2 pont)

$225 = 3^2 \cdot 5^2$. Mivel $0 < c-b < c+b$, ezért a tényezőkre bontás lehetőségei:

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| $c-b$ | 1 | 3 | 5 | 9 |
| $c+b$ | 225 | 75 | 45 | 25 |

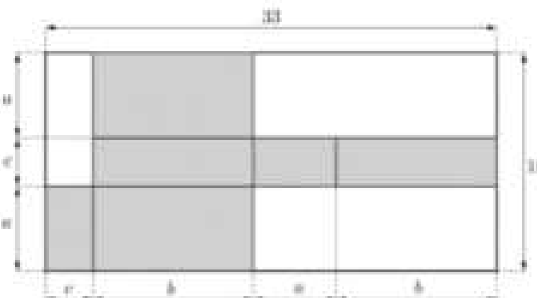
(2 pont)

$c$ lehetséges értékei rendre 113, 39, 25, 17, a hozzájuk tartozó $b$ értékek rendre 112, 36, 20, 8. Tehát **4 megfelelő derékszögű háromszög van.**

(2 pont)

**Összesen: 16 pont**

**35) Egy $33 \times 18$ cm-es kartonlapból (kivágással, hajtogatással) téglatest alakú dobozt készítenek. A doboz (sötétre színezett) kiterített hálóját és méreteit az *ábra* szerint választják meg.**




**a) Határozza meg a doboz térfogatát, ha $a = 7$ cm! (3 pont)**

**b) Hogyan kell megválasztani az $a$, $b$, $c$, élek hosszát ahhoz, hogy a doboz térfogata maximális legyen? (9 pont)**

**Egy téglatest bármely három csúcsa egy háromszöget határoz meg.**

**c) A téglatest csúcsai által meghatározott háromszögek között hány olyan van amelynek a síkja nem esik egybe a téglatest egyik lapjának síkjával sem? (4 pont)**

***Megoldás:***

a) *Lásd: Térgeometria 32. feladat*

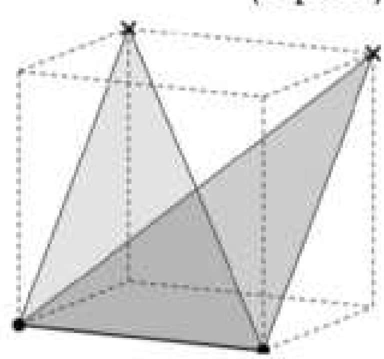
b) *Lásd: Függvények - Analízis 39. feladat*

c) A téglatest 8 csúcs összesen $\binom{8}{3} = 56$ háromszöget határoz meg. (1 pont)

Ezek közül le kell vonni azokat, melyeknek síkja egybeesik a téglatest valamelyik lapjának síkjával, Mind a hat lapon négy ilyen háromszög van, összesen tehát 24. (2 pont)

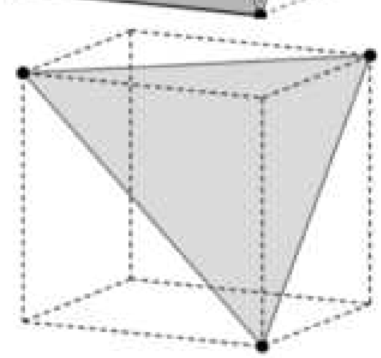
A megfelelő háromszögek száma $\mathbf{(56 - 24 =)32}$. (1 pont)

***Alternatív megoldás:***



A feladat szerint nem választható olyan háromszög, amelynek két oldala a téglatest két élével azonos.

Ha a háromszög egyik oldala a téglatest egy éle, akkor ennek a két végpontjához kétféleképpen választhatjuk a háromszög harmadik csúcsát, mert a kiválasztott élben csatlakozó két lap egyik csúcsa sem választható a háromszög harmadik csúcsaként. (1 pont)



A téglatestnek 12 éle van, ezért ilyen háromszögből összesen $12 \cdot 2 = 24$ darab van. (1 pont)

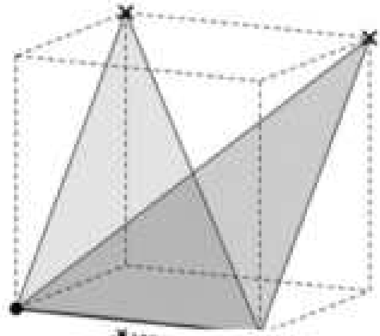
Ha a háromszögnek nincs olyan oldala, amelyik a téglatest valamelyik élével azonos, akkor mindhárom oldala a téglatest egy-egy lapjának átlója.

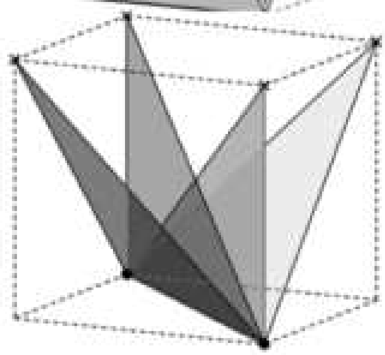
A téglatest egy adott csúcsából kiinduló három él nem közös végpontjai egy háromszöget határoznak meg.

A téglatestnek 8 csúcsa van, ezért ilyen háromszögből 8 darab van. (1 pont)

A megfelelő háromszögek száma $\mathbf{24+8=32}$. (1 pont)

***Alternatív megoldás:***





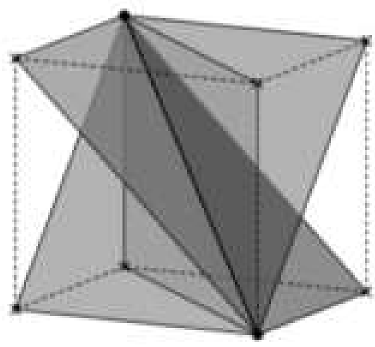
A téglatest „alsó" lapjáról két szomszédos csúcsot 4-féleképpen választhatunk, ezekhez a feltételeknek megfelelően a „felső" lapjáról 2-féleképpen választhatjuk a harmadik csúcsot. (1 pont)

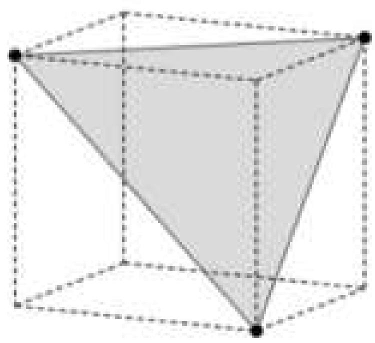
Az alsó lapról két átellenes csúcsot 2-féleképpen választhatunk, ezekhez a felső lapról 4-féleképpen választhatjuk a harmadik csúcsot. (1 pont)

Tehát $(4\cdot 2+2\cdot 4=)16$ megfelelő háromszög van, melyeknek az alsó lapon van két csúcsa, és ugyanígy 16 megfelelő háromszög van, melyeknek a felső lapon van két csúcsa. (1 pont)

Összesen tehát **32** megfelelő háromszög van. (1 pont)

***Alternatív megoldás:***





A téglatest egy kiválasztott testátlójának két végpontjához a téglatest maradék 6 csúcsának bármelyike választható a háromszög harmadik csúcsának. (1 pont)

A téglatestnek 4 testátlója van, ezért ilyen háromszögekből összesen $6\cdot 4=24$ darab van. (1 pont)

Ha a háromszögnek nincs olyan oldala, amelyik a téglatest valamelyik testátlója, akkor nem lehet olyan oldala sem, amelyik a téglatest valamelyik éle, ezért mindhárom oldala lapátló.

Ilyen háromszögből 8 darab van. (1 pont)

A megfelelő háromszögek száma $\mathbf{24+8=32}$. (1 pont)

**Összesen: 16 pont**

**36) Egy egyenlő szárú háromszög oldalai hosszúságának átlaga 10, szórása $3\sqrt{2}$.**

a) **Határozza meg a háromszög oldalainak a hosszát! (6 pont)**

**Egy háromszög csúcsai a derékszögű koordináta-rendszerben $A(-6;0)$, $B(6;0)$, és $C(0;8)$.**

**b) Igazolja, hogy a $3x-4y=-12$ egyenletű *e* egyenes felezi az *ABC* háromszög kerületét és területét is! (10 pont)**

***Megoldás:***

a) A háromszög kerülete 30 egység.

Jelölje az oldalak hosszát $x$, $x$ és $30-2x$. (1 pont)

A szórás miatt:

$$\sqrt{\frac{(10-x)^2+(10-x)^2+(2x-20)^2}{3}}=3\sqrt{2}$$ (1 pont)

$200-40x+2x^2=18$

$2x^2-40x+182=0$

$x^2-20x+91=0$ (1 pont)

$x_1=7$ vagy $x_2=13$ (1 pont)

A háromszög oldalai az első esetben 7, 7, 16 egység, a második esetben **13, 13, 4 egység**. (1 pont)

Ellenőrzés: Az első eset nem lehetséges, mert nem teljesül a háromszög egyenlőtlenség.

A második eset lehetséges, mert teljesül a háromszög egyenlőtlenség és a szórás $\sqrt{\frac{3^2+3^2+6^2}{3}}=\sqrt{18}=3\sqrt{2}$ valóban.y (1 pont)

b) *Lásd: Koordinátageometria 26. feladat*

**Összesen: 16 pont**

**37) a) Döntse el, hogy igaz-e a következő állítás! Válaszát indokolja! (4 pont)**

***Ha egy háromszög két magassága egyenlő hosszúságú, akkor a háromszög egyenlő szárú.***

**Egy háromszögben a szokásos jelölésekkel $a=3$, $b=\sqrt{27}$ és $\beta=2\alpha$.**

**b) Számítsa ki a háromszög szögeit! (5 pont)**

**Az egységnyi oldalú, szabályos *ABC* háromszögbe olyan *PQRS* téglalapot írunk, melynek *PQ* oldala az *AB* oldalra illeszkedik, *R* a *BC* oldal pontja, *S* pedig a *CA* oldalé.**

**c) Határozza meg a *PQRS* téglalap területének maximális értékét!**

**(7 pont)**

***<u>Megoldás:</u>***

a) *Lásd: Bizonyítások 26. feladat*

b) A szinusztétel szerint: $\frac{\sqrt{27}}{3}=\frac{\sin 2\alpha}{\sin\alpha}$. (1 pont)

$\sqrt{3}=\frac{2\sin\alpha\cdot\cos\alpha}{\sin\alpha}$ (1 pont)

$\cos\alpha=\frac{\sqrt{3}}{2}$ (1 pont)

vagyis $\alpha=\mathbf{30^\circ}$ (1 pont)

$\beta=\mathbf{2\cdot 30^\circ=60^\circ}$, a harmadik szög pedig $\mathbf{90^\circ}$ (1 pont)

c) Legyen $PQ$ szakasz hossza $x$ $(0<x<1)$, (1 pont)

ekkor $AP=QB=\frac{1-x}{2}$, (1 pont)

és $PS=QR=\sqrt{3}AP=\frac{\sqrt{3}}{2}(1-x)$. (1 pont)

A $PQRS$ téglalap területét a

$T(x)=\frac{\sqrt{3}}{2}x(1-x)$ $(0<x<1)$ függvény adja meg. (1 pont)

Az $x\mapsto\frac{\sqrt{3}}{2}x(1-x)$ másodfokú függvény maximumhelye a két zérushelyének (0 és 1) számtani közepe: 0,5. (Ez a $T$ maximumhelye is.) (2 pont)

$T\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}=\frac{\sqrt{3}}{8}\approx$ **0,217 területegység** (1 pont)

**Összesen: 16 pont**

**38) Az *ABCD* húrnégyszögben $AB=20$, $BC=18$, $ABC_\sphericalangle=70°$, $CAD_\sphericalangle=50°$.**

**a) Milyen hosszú a *CD* oldal, és mekkora a húrnégyszög területe?** **(7 pont)**

**A derékszögű koordináta-rendszerben adottak a $P(-2;0)$, $Q(6;0)$ és $R(0;5)$ pontok, a *H* pedig a *PQ* szakasz tetszőleges pontja.**

**b) Számítsa ki a $\overrightarrow{PH}$ és az $\overrightarrow{RH}$ vektorok skaláris szorzatát, ha $H(-1{,}8;0)$** **(2 pont)**

**c) Adja meg a *H* pont koordinátáit úgy, hogy a $\overrightarrow{PH}$ és az $\overrightarrow{RH}$ vektorok skaláris szorzata maximális, illetve úgy is, hogy minimális legyen!** **(7 pont)**

***Megoldás:***

a) *ABC* háromszög koszinusztétellel:

$AC^2=20^2+18^2-2\cdot20\cdot18\cdot\cos70°$, (1 pont)

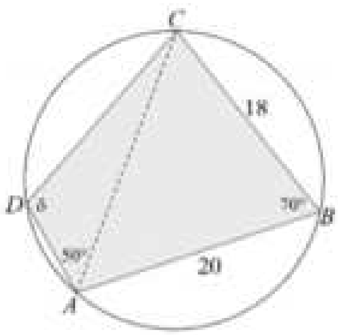
$AC\approx21{,}86$. (1 pont)

A húrnégyszögben $\delta=180°-70°=110°$. (1 pont)

*ACD* háromszögben szinusztétellel:

$\frac{CD}{AC}=\frac{\sin50°}{\sin110°}$, (1 pont)

$CD\approx17{,}82$. (1 pont)




$DCA_\sphericalangle=20°$, ezért a négyszög területe:

$$\frac{20\cdot18\cdot\sin70°}{2}+\frac{21{,}86\cdot17{,}82\cdot\sin20°}{2}\approx$$

$(\approx196{,}1+66{,}6=)$ **235,8**. (2 pont)

b) *Lásd: Koordinátageometria 28. feladat*

c) *Lásd: Koordinátageometria 28. feladat*

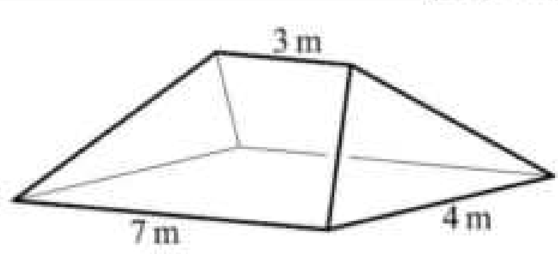
**Összesen: 16 pont**

**39) Ádám balatoni telkén áll egy kis hétvégi ház. A ház felülnézete egy 7 m × 4 m-es téglalap. Ha esik az eső, akkor a tetőre lehulló csapadékot a tető négy oldalán körbefutó ereszcsatornák gyűjtik össze és vezetik be négy nagy, kezdetben üres (fedett) hordóba. A hordók forgáshenger alakúak, belső átmérőjük 40 cm, magasságuk 90 cm.**

**Egy nyári zivatar alkalmával 15 mm csapadék hullott a településen (ez azt jelenti, hogy minden vízszintes felületen 15 mm magasan állna az esővíz, ha nem szivárogna el.) A zivatar közben a tetőre lehullott csapadék 95%-a összegyűlt a hordókban.**

a) **A zivatar után mindegyik hordóban ugyanolyan magasan állt a víz. Mekkora ez a magasság?** **(5 pont)**

**A ház cseréptetetje elöregedett, cserélni kell. A tető felülete négy síkidomból áll. A háztető 7 méteres oldalaihoz két egybevágó húrtrapéz csatlakozik, amelyek síkja a vízszintessel egyaránt 30 fokos szöget zár be. A trapézok**



**egymáshoz csatlakozó, rövidebb oldala 3 méter hosszú. A háztető 4 méteres oldalaihoz két egybevágó, egyenlő szárú háromszög csatlakozik.**

b) **Hány darab cserepet kell vásárolnia Ádámnak a tető újracserepezéséhez, ha a tetőfelület egy négyzetméterére 30 darabra van szükség, és a megvásárolt mennyiség 8%-a hulladék lesz?**

**(11 pont)**

***Megoldás:***

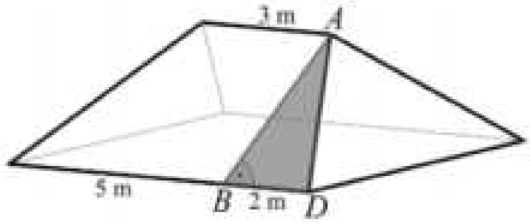
a) *Lásd: Térgeometria 36. feladat*

b) A tető $A$ csúcsán áthaladó, az alapsíkjára merőleges, és a tető rövidebb oldalával párhuzamos síkmetszet a padlást olyan $ABC$ egyenlő szárú háromszögben metszi, melynek $BC$ alapja 4 méter hosszú, alapon fekvő szögei pedig 30 fokosak. (2 pont)


A háromszög szárainak hossza $AB = AC = \dfrac{2}{\cos 30°} = \dfrac{4}{\sqrt{3}} \approx 2{,}31\ (\mathrm{m})$, ezek egyúttal a tetőt alkotó két trapéz magasságai. (1 pont)

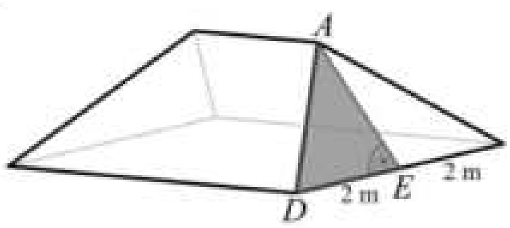
A trapézok területe így $T_1 = \dfrac{(7+3)}{2} \cdot \dfrac{4}{\sqrt{3}} = \dfrac{20}{\sqrt{3}} \approx 11{,}55\ \left(\mathrm{m}^2\right)$. (1 pont)

A trapézok szárai a tetőt alkotó két egyenlő szárú háromszögnek is szárai.
Az ábra szerint $AD$ szár az $ABD$ derékszögű háromszögből határozható meg.




$BD = \dfrac{7-3}{2} = 2\ (\mathrm{m})$, így a Pitagorasz-tétellel:

$AD = \sqrt{2^2 + \left(\dfrac{4}{\sqrt{3}}\right)^2} = \sqrt{\dfrac{28}{3}} \approx 3{,}06\ (\mathrm{m})$. (2 pont)




A háztetőt alkotó egyenlőszárú háromszög $AE$ magassága (szintén a Pitagorasz-tétellel): $AE = \sqrt{\dfrac{28}{3} - 2^2} = \dfrac{4}{\sqrt{3}} \approx 2{,}31\ (\mathrm{m})$, (1 pont)

így a háromszög területe $T_2 = \dfrac{4}{2} \cdot \dfrac{4}{\sqrt{3}} = \dfrac{8}{\sqrt{3}} \approx 4{,}62\ \left(\mathrm{m}^2\right)$. (1 pont)

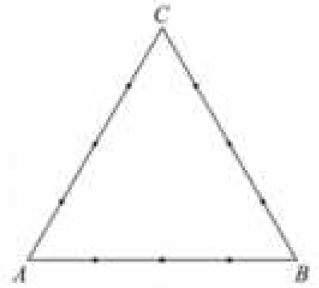
A tető teljes felülete $2(T_1+T_2)=\frac{56}{\sqrt{3}}\approx 32{,}33\ \mathrm{m}^2$. (1 pont)

Ekkora felület fedésére $32{,}33\cdot 30\approx 970$ cserépre lesz szükség, (1 pont)

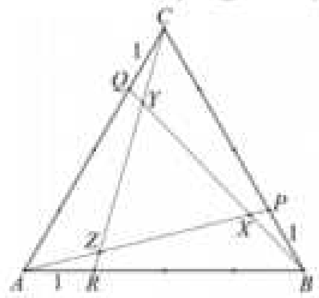
a hulladékot is figyelembe véve pedig $\frac{970}{0{,}92}\approx \mathbf{1055}$ darab cserepet kell vásárolni. (1 pont)

**Összesen: 16 pont**

**40) Az *ABC* szabályos háromszög mindhárom oldalát 3-3 osztóponttal négy egyenlő részre osztottuk.**




**a) Hány olyan négyszög van, melynek mind a négy csúcsa a háromszög oldalain kijelölt 9 pont közül való úgy, hogy a négyszögnek a háromszög mindegyik oldalán van legalább egy csúcsa? (Két négyszöget különbözőnek tekintünk, ha legalább egy csúcsukban különböznek.)** **(5 pont)**



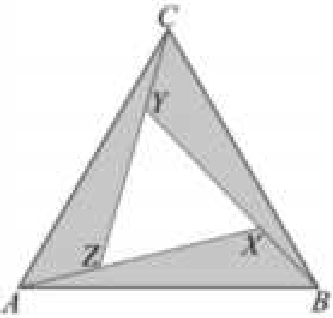

**Jelölje a 4 egység oldalú *ABC* szabályos háromszög *BC* oldalának *B*-hez közelebbi negyedelőpontját *P*, a *CA* oldal *C*-hez közelebbi negyedelőpontját *Q*, az *AB* oldal *A*-hoz közelebbi negyedelőpontját pedig *R*. Jelölje továbbá *AP* és *BQ* szakaszok metszéspontját *X*, *BQ* és *CR* szakaszok metszéspontját *Y*, végül *CR* és *AP* szakaszok metszéspontját *Z*.**

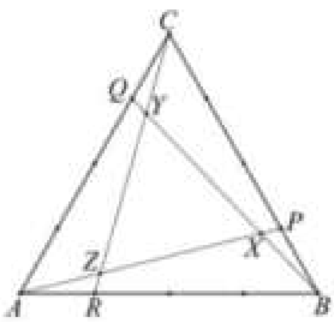
**b) Határozza meg az *XYZ* háromszög területét!** **(11 pont)**

***Megoldás:***

a) *Lásd: Kombinatorika 45. feladat*

b) A (harmadrendű) forgásszimmetria miatt az *ABX*, *BCY* és *CAZ* háromszögek egybevágóak, és az *XYZ* háromszög szabályos. (1 pont)




(Kiszámítjuk az *ABX* háromszög területét.)

Az *ABP* háromszögben $AB=4,\ PB=1,\ PBA_\measuredangle=60°$.

Koszinusztétellel: $AP^2=1^2+4^2-2\cdot 1\cdot 4\cdot\cos 60°=13,\ AP=\sqrt{13}\ (\approx 3{,}606)$. (2 pont)

Az *ABP* háromszögben $\alpha=BAP_\measuredangle$.

Szinusztétellel: $\frac{\sin\alpha}{\sin 60°}=\frac{1}{\sqrt{13}}$, (1 pont)

$\sin\alpha=\frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{13}}\ (\approx 0{,}2402)$, $\alpha\approx 13{,}9°$ ($\alpha$ hegyesszög). (1 pont)

A forgásszimmetria miatt $CBQ_\measuredangle=\alpha$, így $ABX_\measuredangle=60°-\alpha\ (\approx 46{,}1°)$. (1 pont)

Az *AXB* háromszögben szinusztétellel: $\frac{AX}{\sin(60°-\alpha)}=\frac{4}{\sin 120°}$,

innen $AX\approx 3{,}328$. (1 pont)

Az $ABX$ háromszög területe $t = \frac{AB \cdot AX \cdot \sin\alpha}{2} \approx \frac{4 \cdot 3,328 \cdot \sin 13,9^\circ}{2} \approx 1,599$.

(2 pont)

Az $XYZ$ háromszög területe $T_{XYZ} = T_{ABC} - 3t \approx$ (1 pont)

$\approx \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot 4^2 - 3 \cdot 1,599 \approx \mathbf{2,13}$. (1 pont)

***Alternatív megoldás:***

Legyen $\alpha = BAP_\measuredangle$.

$ABC_\measuredangle = 60^\circ$ miatt

$BPA_\measuredangle = 120^\circ - \alpha$. (1 pont)

Az $ABP$ háromszögben szinusztétellel: $\frac{\sin\alpha}{\sin(120^\circ - \alpha)} = \frac{1}{4}$. (1 pont)

$4\sin\alpha = \sin(120^\circ - \alpha)$

$4\sin\alpha = \sin 120^\circ \cdot \cos\alpha - \cos 120^\circ \cdot \sin\alpha$

$4\sin\alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}\cos\alpha + \frac{1}{2}\sin\alpha$ (1 pont)

$\frac{7}{2}\sin\alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}\cos\alpha$

$\mathrm{tg}\alpha = \frac{\sqrt{3}}{7} (\approx 0,2474)$ (1 pont)

$\alpha \approx 13,9^\circ$ (1 pont)

A forgásszimmetria miatt $QBC_\measuredangle = \alpha$, így $ABX_\measuredangle = 60^\circ - \alpha \approx 46,1^\circ$. (1 pont)

Az $ABX$ háromszögben ($AXB_\measuredangle = 120^\circ$ miatt) szinusztétellel:

$\frac{\sin\alpha}{\sin 120^\circ} = \frac{BX}{4}$, (1 pont)

valamint $\frac{\sin(60^\circ - \alpha)}{\sin 120^\circ} = \frac{AX}{4}$. (1 pont)

Innen $BX \approx 1,109$ és $AX \approx 3,328$. (1 pont)

A forgásszimmetria miatt $AZ = BX$,
így $ZX = AX - AZ = AX - BX \approx 2,219$. (1 pont)

A forgásszimmetria miatt az $XYZ$ háromszög szabályos, területe tehát $\frac{\sqrt{3}}{4} \cdot XZ^2 \approx \mathbf{2,13}$. (1 pont)

**Összesen: 16 pont**

**41) Az *ABCD* konvex négyszögben $AB = 50$ m, $BC = 60$ m, $CD = 70$ m, továbbá $BAD\measuredangle = BCD\measuredangle = 100,3^\circ$.**

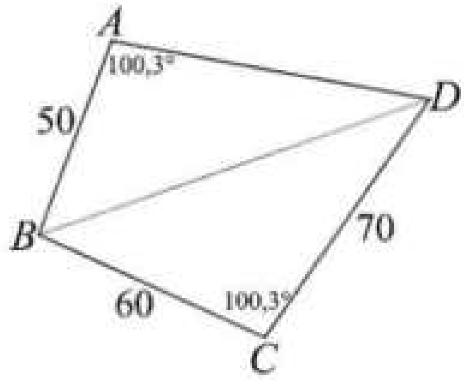
**a) Számítsd ki a négyszög területét! (9 pont)**

**Az *ABCD* konvex négyszöget az átlói négy háromszögre bontják. Ezeket pirosra, kékre, sárgára vagy zöldre színezzük úgy, hogy bármely két szomszédos háromszög különböző színű legyen, de az egymással szemben fekvők azonos színűek is lehetnek. (Két háromszög szomszédos, ha van közös oldaluk.)**

**b) Hány olyan különböző színezés lehetséges, amelyhez pontosan 3 színt használunk? (6 pont)**

***Megoldás:***

a) Az adatokat helyesen feltüntető ábra: (1 pont)




A $BCD$ háromszög területe:

$$\frac{BC \cdot CD \cdot \sin 100,3^\circ}{2} = \frac{60 \cdot 70 \cdot \sin 100,3^\circ}{2} \approx 2066 \text{ m}^2$$

(1 pont)

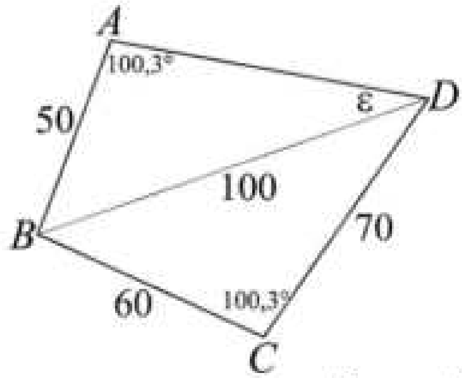
A $BCD$ háromszögben koszinusztétellel:

$BD^2 = 60^2 + 70^2 - 2 \cdot 60 \cdot 70 \cdot \cos 100,3^\circ$ (1 pont)

Ebből $BD \approx 100$ m. (1 pont)

Az $ABD$ háromszögben szinusztétellel:

$$\frac{\sin \varepsilon}{\sin 100,3^\circ} = \frac{50}{100}.$$ (1 pont)




$\sin \varepsilon \approx 0,4919$, amiből $\varepsilon \approx 29,5^\circ$, mivel hegyesszög. (1 pont)

$ABD\sphericalangle = (180^\circ - 100,3^\circ - 29,5^\circ =) 50,2^\circ$, (1 pont)

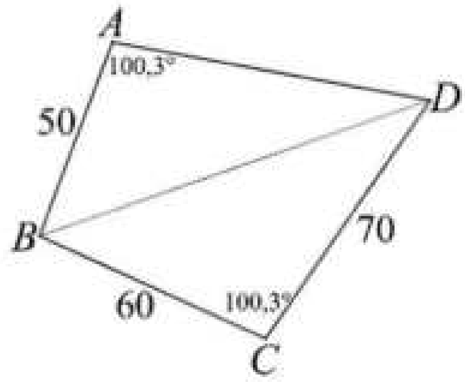
így az $ABD$ háromszög területe

$$\frac{AB \cdot BD \cdot \sin 50,2^\circ}{2} = \frac{50 \cdot 100 \cdot \sin 50,2^\circ}{2} \approx 1921 \text{ m}^2.$$

A négyszög területe: $2066 + 1921 = \mathbf{3987\ m^2}$. (1 pont)

***Alternatív megoldás:***

a) Az adatokat helyesen feltüntető ábra: (1 pont)




A $BCD$ háromszög területe:

$$\frac{BC \cdot CD \cdot \sin 100,3^\circ}{2} = \frac{60 \cdot 70 \cdot \sin 100,3^\circ}{2} \approx 2066 \text{ m}^2.$$

(1 pont)

A $BCD$ háromszögben koszinusztétellel:

$BD^2 = 60^2 + 70^2 - 2 \cdot 60 \cdot 70 \cdot \cos 100,3^\circ$. (1 pont)

Ebből $BD \approx 100$ m.

Legyen $AD = x$ (m). (1 pont)

Az $ABD$ háromszögben koszinusztétellel:

$50^2 + x^2 - 2 \cdot 50 \cdot x \cdot \cos 100,3^\circ = 100^2$. (1 pont)

Rendezve: $x^2 + 17,88x - 7500 = 0$. (1 pont)

Az egyenlet pozitív gyöke $\approx 78,1$. (A negatív gyök $\approx -96,0$). (1 pont)

Ezért az $ABD$ háromszög területe:

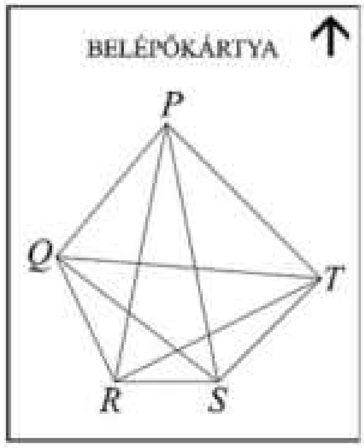
$$\frac{AB \cdot AD \cdot \sin 100,3^\circ}{2} = \frac{50 \cdot 78,1 \cdot \sin 100,3^\circ}{2} \approx 1921 \text{ m}^2.$$ (1 pont)

A négyszög területe: $2066 + 1921 = \mathbf{3987\ m^2}$. (1 pont)

b) *Lásd: Kombinatorika 46. feladat*

**Összesen: 15 pont**

**42) Egy többnapos nemzetközi matematikakonferencia minden résztvevője belépőkártyát kap, amelyen a *PQRST* konvex ötszög és annak átlói láthatók. A szervezők úgy tervezik, hogy egy-egy belépőkártyán az ötszög oldalai és átlói közül valahányat (egyet vagy többet, akár az összeset, de az is lehet, hogy egyet sem) megvastagítanak, így a különböző személyek különböző ábrájú kártyát kapnak. Az elektronikus kapu optikai leolvasója ez alapján engedélyezi a belépést, és elvégzi a személy regisztrációját. (Két belépőkártya különböző, ha az egyiken szerepel olyan megvastagított szakasz, amelyik a másikon nem.) A konferenciának 400 résztvevője lesz.**




**a) Jut-e mindenkinek különböző belépőkártya? (3 pont)**

**A konferencia épülete egy háromszög alakú területen van. Ha a háromszög csúcsai *A*, *B* és *C*, akkor $AB = AC = 130$ méter, és $BC = 100$ méter. A háromszög alakú területet kettéosztja az egyenes *CD* kerítés úgy, hogy a *BCD* háromszög alakú rész területe $200\ \text{m}^2$. (*D* az *AB* oldalon van.)**

**b) Milyen hosszú a *CD* kerítés? (7 pont)**

**A konferencián 200 magyar, 70 angol és 130 német matematikus vesz részt. Az angolok életkorának átlaga 44 év, a németeké 48 év, az összes résztvevő életkorának átlaga 45,7 év.**

**c) Mennyi a magyar résztvevők életkorának átlaga? (4 pont)**

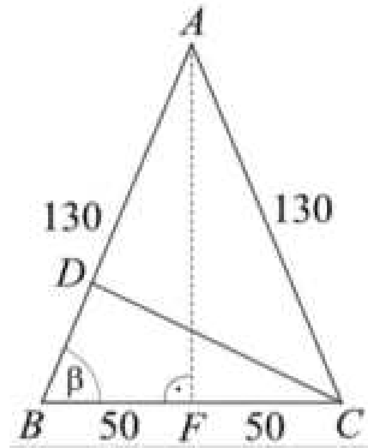
***Megoldás:***

a) *Lásd: Kombinatorika 48. feladat*

b) Az ábra jelöléseit használjuk. (1 pont)

Az *ABF* derékszögű háromszögben

$\cos\beta = \dfrac{50}{130} (\approx 0{,}3846)$, (1 pont)




ahonnan $\beta \approx 67{,}4^\circ$. (1 pont)

A *BCD* háromszög területe $2000\ \text{m}^2$,

ezért $\dfrac{BD \cdot BC \cdot \sin\beta}{2} = \dfrac{BD \cdot 100 \cdot \dfrac{12}{13}}{2} = 2000$. (1 pont)

Ebből $BD = \dfrac{130}{3} \approx 43{,}3\ \text{m}$. (1 pont)

A *BCD* háromszögben felírva a koszinusztételt:

$CD^2 = \dfrac{130^2}{3} + 100^2 - 2 \cdot \dfrac{130}{3} \cdot 100 \cdot \cos\dfrac{5}{13}$. (1 pont)

**Ebből a kerítés hossza: $CD \approx 92{,}4\ \text{m}$.** (1 pont)

***Alternatív megoldás:***

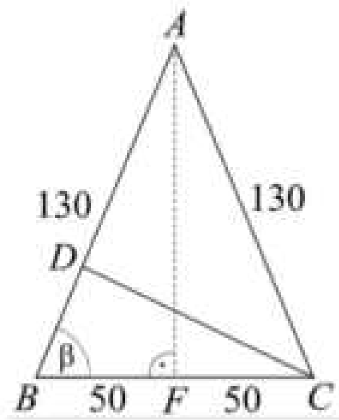
Az ábra jelöléseit használjuk. (1 pont)

Az *ABC* háromszög *AF* magassága Pitagorasz-tétellel:

$\sqrt{130^2 - 50^2} = 120$ méter. (1 pont)

Az *ABC* egyenlő szárú háromszög területe:

$\dfrac{100 \cdot 120}{2} = 6000\ \text{m}^2$. (1 pont)



Mivel a $BCD$ háromszög területe $2000\ \text{m}^2$, ezért az $ABC$ háromszöggel közös $BC$ oldalához tartozó magassága harmada az $ABC$ háromszögének:
$DE\,(=120:3)=40$ méter. (1 pont)

$BDE_\triangle \sim BAF_\triangle$, mert mindkettő derékszögű, és közös az egyik hegyesszögük. (1 pont)

A háromszögek hasonlóságának aránya $DE:AF=1:3$, ezért $BR=\dfrac{50}{3}$, így $EC=\dfrac{250}{3}$. (1 pont)

A $DEC$ derékszögű háromszögből Pitagorasz-tétellel számítható **a $CD$ kerítés hossza: $CD=\sqrt{40^2+\left(\frac{250}{3}\right)^2}\approx 92{,}4$ méter**. (1 pont)

c) *Lásd: Statisztika 22. feladat*

**Összesen: 14 pont**

**43) Az ókori egyiptomiak az egyenlő szárú háromszög területét (közelítő módszerrel) úgy számolták ki, hogy az alap és a szár szorzatának a felét vették.**

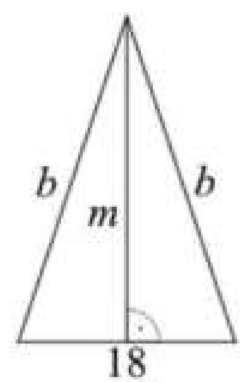
**a) Egy egyenlő szárú háromszög alapja 18 cm hosszú. Mekkora lehet a szára, ha az ókori egyiptomiak módszere e háromszög valódi területét 25%-nál kisebb hibával adja meg? (9 pont)**

**Az ókori Egyiptom matematikájában a számok négyzetének is jelentős szerep jutott.**

**b) Hány olyan 1000-nél kisebb pozitív egész szám van, amellyel az $1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5\cdot6$ számot megszorozva négyzetszámot kapunk? (7 pont)**

***Megoldás:***

a) Legyen a háromszög szára (cm-ben mérve) $b$. Az egyiptomi számítás szerint a terület közelítőleg $\dfrac{18\cdot b}{2}=9b$. (1 pont)




A háromszög alapjához tartozó magassága (Pitagorasz-tétellel) $m=\sqrt{b^2-9^2}$. (1 pont)

A háromszög területe valójában $\dfrac{18\cdot m}{2}=9\cdot\sqrt{b^2-81}$. (1 pont)

A valódi terület ($m<b$ miatt) kisebb, mint a közelítő érték, (1 pont)
ezért, ha a számításban elkövetett hiba kisebb, mint 25%, akkor $\dfrac{9b}{9\cdot\sqrt{b^2-81}}<1{,}25$. (1 pont)

Rendezve: $b<1{,}25\cdot\sqrt{b^2-81}$. (1 pont)

Mindkét oldal pozitív, a négyzetre emelés ekvivalens átalakítás: $b^2<1{,}5625\cdot\left(b^2-81\right)$, $b^2>\dfrac{1{,}5625\cdot81}{0{,}5625}=225$, (2 pont)

innen $b>15$. **A háromszög szára tehát nagyobb, mint 15 cm**. (Ilyen háromszög mindig létezik.) (1 pont)

b) *Lásd: Számelmélet 16. feladat*

**Összesen: 16 pont**